

**Teodor HUIDU**

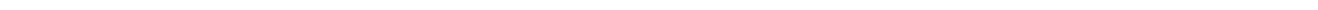
**Cornel MARIN**

**PROBLEME  
REZOLVATE  
DE MECANICĂ**

Recenzia științifică:

**Prof. dr. ing. Nicolae Enescu**

**Prof. dr. ing. Ion ROȘCA**



Descrierea CIP a Bibliotecii nationale a României

HUIDU, TEODOR

Probleme rezolvate de mecanică / Teodor Huidu,

Cornel Marin. - Târgoviște : Editura Macarie, 2001

260p; 25cm - (Universitaria)

Bibliogr.

ISBN 973 - 8135 - 60 - 5

I. Marin, Cornel

531(076)

Consilier editorial: Mihai VLAD

Tehnoredactare computerizată: Cornel MARIN

# CUPRINS

## PREFAȚĂ

### CAPITOLUL I STATICA PUNCTULUI MATERIAL

*Elemnte de bază din teoria vectorilor. Rezumat*

- 1.1. Statica punctului material. Probleme din teoria vectorilor.
- 1.2. Reducerea unui sistem de forțe concurente coplanare. Probleme rezolvate
- 1.3. Reducerea unui sistem de forțe concurente spațiale. Probleme rezolvate

*Echilibrul punctului material liber și supus la legături. Axioma legăturilor Rezumat*

- 1.4 Echilibrul punctului material liber. Probleme rezolvate
  - 1.5 Echilibrul punctului material supus la legături ideale și reale. Probleme rezolvate
- Probleme propuse

### CAPITOLUL II REDUCEREA SISTEMELOR DE FORȚE

*Reducerea istemelor de forțe aplicate solidului rigid. Rezumat*

- 2.1. Reducerea sistemelor coplanare de forțe și cupluri. Probleme rezolvate
- 2.2. Reducerea sistemelor de forțe paralele. Probleme rezolvate .
- 2.3. Reducerea sistemelor spațiale de forțe și cupluri. Probleme rezolvate

### CAPITOLUL III CENTRE DE MASĂ SI CENTRE DE GREUTATE

*Centre de masă și centre de greutate. Rezumat*

- 3.1 Centrul de masă pentru bare omogene. Probleme rezolvate.
- 3.2 Centrul de masă pentru plăci omogene. Probleme rezolvate.
- 3.3 Centrul de masă pentru corpuri omogene. Probleme rezolvate.

### CAPITOLUL IV

#### ECHILIBRUL FORȚELOR APLICATE SOLIDULUI RIGID

*Teoremele echilibrului forțelor aplicate solidului rigid. Rezumat*

- 4.1. Echilibrul solidului rigid liber sub acțiunea unui sistem spațial de forțe.
- 4.2. Echilibrul solidului rigid de tip placă sau bară supus la legături sub acțiunea unui sistem coplanar de forțe.

### CAPITOLUL V ECHILIBRUL SISTEMELOR DE CORPURI

*Teoremele echilibrului forțelor aplicate sistemelor de corpuri. Rezumat*

- 5.1. Echilibrul sistemelor plane de corpuri de tip bară. Probleme rezolvate
- 5.2. Echilibrul sistemelor plane de corpuri cu frâne de tip sabot, tampon sau bandă. Probleme rezolvate

### CAPITOLUL VI GRINZI CU ZĂBRELE

*Echilibrului forțelor aplicate grinzilor cu zăbrele. Rezumat*

Grinzi cu zăbrele. Probleme rezolvate .

## **CAPITOLUL VII ECHILIBRUL FIRELOR OMOGENE**

*Echilibrul firelor omogene. Rezumat.*

Probleme rezolvate de echilibrul firelor omogene

## **CAPITOLUL VIII**

### **CINEMATICA MIȘCĂRII ABSOLUTE A PUNCTULUI MATERIAL**

Probleme rezolvate de cinematica mișcării absolute a punctului material

## **CAPITOLUL IX**

### **DINAMICA MIȘCĂRII ABSOLUTE A PUNCTULUI MATERIAL**

Probleme rezolvate de dinamica mișcării absolute a punctului material

## **CAPITOLUL X**

### **CINEMATICA RIGIDULUI ȘI A SISTEMELOR DE RIGIDE**

Probleme rezolvate de cinematica rigidului și a sistemelor de rigide

Probleme propuse

## **CAPITOLUL XI**

### **CINEMATICA MIȘCĂRII RELATIVE A PUNCTULUI MATERIAL**

Probleme rezolvate de cinematica mișcării absolute a punctului material

Probleme propuse

## **CAPITOLUL XII**

### **DINAMICA MIȘCĂRII RELATIVE A PUNCTULUI MATERIAL**

Probleme rezolvate de dinamica mișcării absolute a punctului material

Probleme propuse

## **CAPITOLUL XIII**

### **DINAMICA RIGIDULUI ȘI A SISTEMELOR DE RIGIDE**

Probleme rezolvate de dinamica rigidului și a sistemelor de rigide

Probleme propuse

## **CAPITOLUL XIV**

### **MECANICĂ ANALITICĂ**

Principiul lucrului mecanic virtual și principiul lui d'Alembert. Probleme rezolvate

Ecuatiile lui Lagrange de speța a doua. Probleme rezolvate.

## PREFAȚĂ

Această lucrare este rezultatul experienței autorilor în predarea cursului de *Mecanica teoretică*, studenților Facultăților de inginerie din cele două centre universitare: *Universitatea “Petrol-Gaze” Ploiești* și *Universitatea “Valahia” Târgoviște*.

Lucrarea cuprinde 14 capitole și anume: Statica punctului material, Elemente de bază din teoria vectorilor, Reducerea forțelor aplicate solidului rigid, Centre de masă și centre de greutate, Echilibrul forțelor aplicate solidului rigid, Echilibrul sistemelor de corpuri, Grinzi cu zăbrele și Echilibrul firelor omogene, Cinematica punctului material, Dinamica punctului material, Cinematica mișcării relative a punctului material, Dinamica mișcării relative punctului material, Cinematica rigidului și a sistemelor de rigide, Dinamica rigidului și a sistemelor de rigide, Elemente de mecanică analitică. Primele șapte capitole conțin câte un scurt *Rezumat de teorie* pentru înțelegerea problemelor rezolvate și care sunt în acord cu Programă analitică a cursului de Mecanică predat studenților în anul I și II la facultățile tehnice.

S-au prezentat cinci algoritmi de rezolvare a unor probleme de Statică cu ajutorul programului Microsoft EXCEL, cu câte un exemplu concret pentru fiecare caz .

Unele aplicații sunt inspirate din practica inginerescă, altele au fost create de autori de-a lungul anilor, ca subiecte de examen. Acestea au un grad de dificultate mediu, fiind accesibile studenților din anii I și II de la profilurile *meccanic, metalurgic, electric*, etc. Forma de prezentare clară pune în evidență experiența în activitatea cu studenții, fiecare capitol fiind bine fundamentat și ușor de asimilat.

Această culegere este rezultatul colaborării fructuoase dintre doi autori de formații diferite: un matematician și un inginer mecanic. Autorii speră că prezentarea sub această formă a problemelor și a temelor aplicative va fi utilă atât pentru pregătirea examenului de Mecanică (pentru studenții anilor I și II) precum și pentru toți cei interesați în rezolvarea unor aplicații practice de Mecanică.

Autorii doresc să mulțumească tuturor *studenților și colegilor* pentru observațiile, sugestiile, adăugirile pe care le-au adus în timp și care au contribuit la apariția lucrării sub această formă.

De asemenea mulțumim călduros *sponsorilor* care au contribuit la apariția acestei ediții, și pe care îi asigurăm atât de recunoștința noastră cât mai ales de cea a beneficiarilor acestei lucrări.



# CAPITOLUL I

## STATICA PUNCTULUI MATERIAL

### REZUMAT DE TEORIE

#### a. Mărimi scalare și vectoriale

În Mecanica teoretică se operează cu *mărimi scalare* (de exemplu: masa, timpul, lungimea, etc) și cu *mărimi vectoriale* (de exemplu: forța, momentul unei forțe în raport cu un punct, cuplul de forțe, viteza, accelerația, impulsul, momentul cinetic, etc).

Vectorul este o *entitate matematică* caracterizată prin: *punct de aplicație*, *direcție* (suport), *sens* (orientare) și *mărime* (scalar, modul)

În funcție de punctul de aplicație se deosebesc:

- *vectori liberi* – care au punctul de aplicație oriunde în spațiu și sunt caracterizați de *trei parametri scalari independenți* (respectiv, proiecțiile vectorului pe cele trei axe de coordonate);
- *vectori alunecători* -au punctul de aplicație situat pe o dreaptă din spațiu și sunt caracterizați de *cinci parametri scalari independenți* (respectiv, proiecțiile vectorului pe cele trei axe de coordonate și coordonatele punctului de intersecție al suportului său cu planul Oxy);
- *vectori legați* - au punctul de aplicație fix în spațiu și sunt caracterizați de *șase parametri scalari independenți* (respectiv proiecțiile vectorului pe cele trei axe și coordonatele punctului de aplicație).

#### b. Expresia analitică a unui vector liber și a unui versor

Se consideră un sistem cartezian de axe Oxyz având versorii  $\bar{i}$ ,  $\bar{j}$ ,  $\bar{k}$  pentru care se cunosc proiecțiile  $a_x$ ,  $a_y$ ,  $a_z$ , ale vectorului pe cele trei axe. Expresia analitică a vectorului  $\bar{a}$  este:

$$\bar{a} = a_x \bar{i} + a_y \bar{j} + a_z \bar{k} \quad (1)$$

Mărimea vectorului  $\bar{a}$  este prin definiție numărul pozitiv notat cu :

$$a = |\bar{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \quad (2)$$

Cosinușii directori ai unghiurilor vectorului  $\bar{a}$  cu direcțiile celor 3 axe sunt:

$$\cos(\bar{a}, \bar{i}) = \frac{a_x}{a} = \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}; \quad \cos(\bar{a}, \bar{j}) = \frac{a_y}{a}; \quad \cos(\bar{a}, \bar{k}) = \frac{a_z}{a} \quad (3)$$

Versorul vectorului  $\vec{a}$  este prin definiție un vector unitar, având mărimea egală cu 1, aceeași direcție și sens cu vector  $\vec{a}$  :

$$\text{vers } \vec{a} = \vec{u}_a = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{a_x}{a} \vec{i} + \frac{a_y}{a} \vec{j} + \frac{a_z}{a} \vec{k} \quad (4)$$

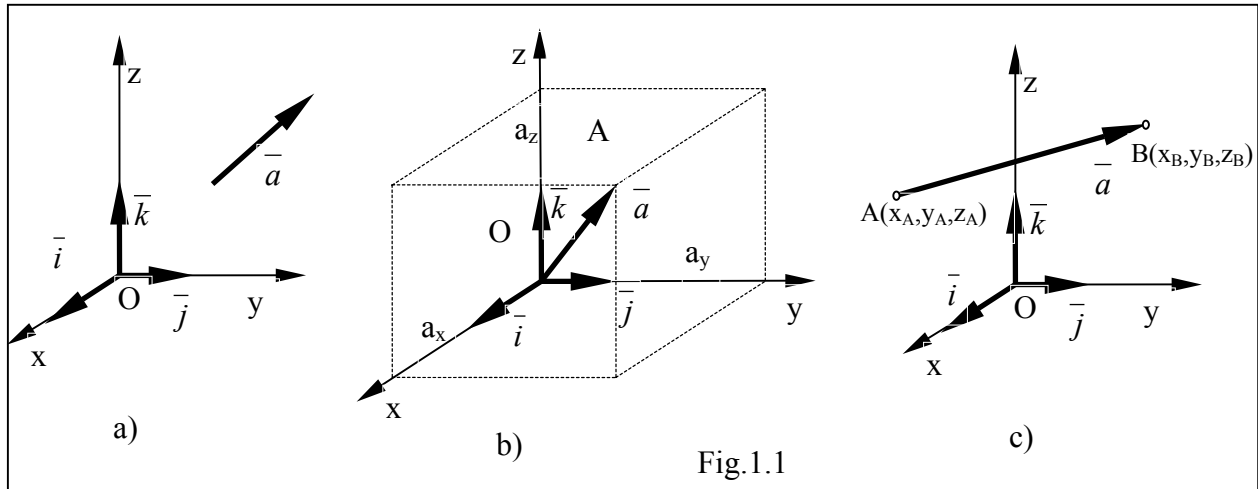


Fig.1.1

Un vector poate fi definit prin cele două extremități ale sale având coordonatele  $A(x_A, y_A, z_A)$  și  $B(x_B, y_B, z_B)$ , și are expresia analitică:

$$\vec{AB} = (x_B - x_A) \vec{i} + (y_B - y_A) \vec{j} + (z_B - z_A) \vec{k} \quad (5)$$

Expresia analitică a versorului vectorului  $\vec{AB}$  conform (4) este:

$$\text{vers } \vec{AB} = \frac{\vec{AB}}{|\vec{AB}|} = \frac{(x_B - x_A) \vec{i} + (y_B - y_A) \vec{j} + (z_B - z_A) \vec{k}}{\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}} \quad (6)$$

### Observație

În cazul rigidului supus la legături, reacțiunile sunt necunoscute ale problemei (deoarece nu se cunoaște mărimea și sensul lor): pentru rezolvarea problemei se alege un sens oarecare ale reacțiunii; dacă din calcul rezultă un număr pozitiv, atunci sensul ales este corect; dacă din calcul rezultă un număr negativ, sensul real este opus celui ales.

### c. Produsul scalar a doi vectori. Proiecția unui vector pe o axă

Dându-se un sistem de axe cartezian  $Oxyz$  și vectorii  $\vec{a}$  și  $\vec{b}$  având expresiile analitice:  $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$  ,  $\vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}$  , se definește *produsul scalar al celor doi vectori* , numărul (pozitiv sau negativ):

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a \cdot b \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b}) \quad (7)$$

Expresia analitică a produsului scalar este:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \quad (8)$$



Cu ajutorul produsului scalar se poate exprima cosinusul unghiului dintre cei doi vectori ; din relațiile (7) și (8) rezultă:

$$\cos(\bar{a}, \bar{b}) = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{ab} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}} \quad (9)$$

Cu ajutorul produsului scalar se poate exprima analitic proiecția unui vector  $\bar{a}$ , pe o direcție orientată  $\Delta$  având versorul:

$$\bar{u}_\Delta = \cos \alpha \cdot \bar{i} + \cos \beta \cdot \bar{j} + \cos \gamma \cdot \bar{k} , \quad (10)$$

astfel:

$$a_u = pr_\Delta \bar{a} = \bar{a} \cdot \bar{u}_\Delta = a_x \cdot \cos \alpha + a_y \cdot \cos \beta + a_z \cdot \cos \gamma \quad (11)$$

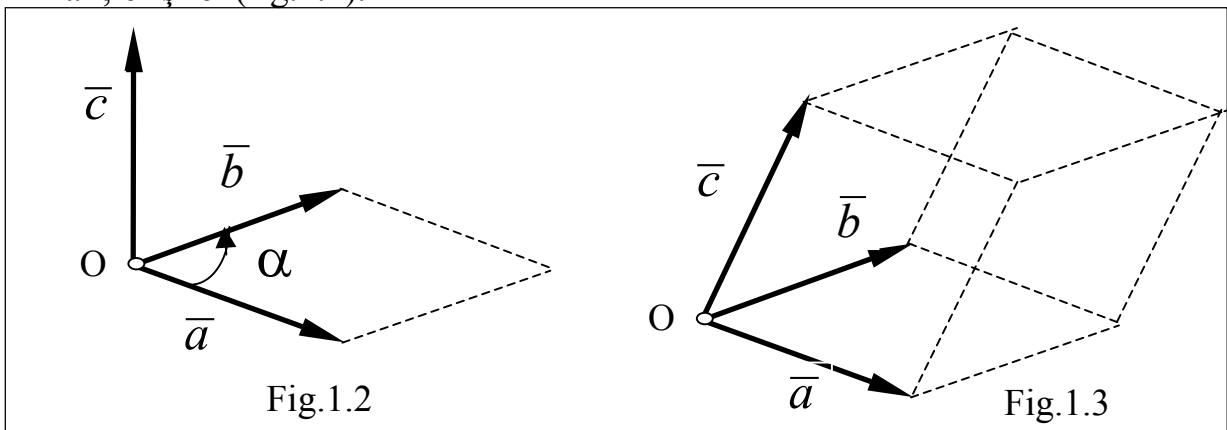
Ținând seama expresia (11), proiecția vectorului  $\bar{a} = a_x \bar{i} + a_y \bar{j} + a_z \bar{k}$  pe direcția vectorului  $\bar{b} = b_x \bar{i} + b_y \bar{j} + b_z \bar{k}$  se scrie :

$$a_b = pr_{\bar{b}} \bar{a} = \bar{a} \cdot \bar{u}_b = \frac{a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z}{b} \quad (12)$$

#### d. Produsul vectorial a doi vectori, a produsului mixt și a produsului dublu vectorial a trei vectori

Se consideră un sistem cartezian de axe Oxyz și vectorii  $\bar{a}$  și  $\bar{b}$  având expresiile analitice:  $\bar{a} = a_x \bar{i} + a_y \bar{j} + a_z \bar{k}$  și respectiv  $\bar{b} = b_x \bar{i} + b_y \bar{j} + b_z \bar{k}$ . Se definește *produsul vectorial al celor doi vectori*  $\bar{c} = \bar{a} \times \bar{b}$ , un vector având următoarele caracteristici:

- mărimea sau modulul egal cu aria paralelogramului format din cei doi vectori  $\bar{a}$  și  $\bar{b}$ :  $|\bar{c}| = a \cdot b \cdot \sin(\bar{a}, \bar{b})$
- direcția - perpendiculară pe planul paralelogramului format din cei doi vectori  $\bar{a}$  și  $\bar{b}$ :  $\bar{c} \perp (\bar{a}, \bar{b})$  (fig.1.2).
- sensul - dat de regula burghiului drept sau triedrul format din cei trei vectori  $\bar{a}$ ,  $\bar{b}$  și  $\bar{c}$  (fig.1.2).



**Produsul vectorial** a doi vectori  $\vec{a}$  și  $\vec{b}$  are expresia analitică:

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}, \text{ sau :} \quad (13)$$

$$\vec{c} = (a_y b_z - a_z b_y) \vec{i} + (a_z b_x - a_x b_z) \vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \vec{k}$$

**Produsul mixt** a trei vectori  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  și  $\vec{c}$  este prin definiție produsul scalar dintre vectorul  $\vec{a}$  și vectorul  $(\vec{b} \times \vec{c})$ :

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} \quad (14)$$

Produsul mixt respectă următoarea *regulă (a permutărilor circulare)*:

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) &= \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) \\ \text{sau } (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) &= (\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}) = (\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}) \end{aligned} \quad (15)$$

Produsul mixt reprezintă volumul paralelipipedului având ca muchii concurente într-un vârf, pe cei trei vectori (fig. 1.3)

**Produsul dublu vectorial** a trei vectori  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  și  $\vec{c}$  este prin definiție produsul vectorial dintre vectorul  $\vec{a}$  și vectorul  $(\vec{b} \times \vec{c})$  și se determină cu ajutorul formulei:

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \cdot \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{c} \quad (16)$$

## 1.1 OPERAȚII CU VECTORI

### PROBLEME REZOLVATE

**1.1.1 Se consideră** vectorii având următoarele expresii analitice față de un sistem de axe  $Oxyz$ :  $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$ ;  $\vec{b} = 5\vec{j} + 4\vec{k}$ ;  $\vec{c} = -2\vec{i} + \vec{j}$

**Se cere să se calculeze:**

$$\vec{a} \cdot \vec{b}; \text{ } pr_{\vec{b}} \vec{a}; \vec{a} \times \vec{b}; |\vec{a} \times \vec{b}|; \cos(\vec{a}, \vec{b}); \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}); \vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b})$$

Problema s-a rezolvat folosind relațiile prezentate în rezumatul de teorie cu ajutorul programului Microsoft-Excel conform algoritmului prezentat în continuare.

**ALGORITMUL DE CALCUL PENTRU PROGRAMUL MICROSOFT EXCEL ȘI REZULTATELE OBTINUTE PENTRU PROBLEMA 1.1.1**

DATE DE INTRARE

DATE DE IEȘIRE

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
Nr.	$a_x$	$a_y$	$a_z$	$b_x$	$b_y$	$b_z$	$c_x$	$c_y$	$c_z$	$ \bar{a} $	$ \bar{b} $	$ \bar{c} $	$\bar{a} \cdot \bar{b}$
0										SQRT(A1^2+B1^2+C1^2)	SQRT(D1^2+E1^2+F1^2)	SQRT(G1^2+H1^2+I1^2)	A1*D1+B1*E1+C1*F1
1	2	-1	3	0	5	4	-2	1	0	3,7416	6,4031	2,2361	7

N	O	P	R	S
$pr_{\bar{b}} \bar{a}$	$(\bar{a} \times \bar{b})_x$	$(\bar{a} \times \bar{b})_y$	$(\bar{a} \times \bar{b})_z$	$ \bar{a} \times \bar{b} $
$A1*D1/K1+B1*E1/K1+C1*F1/K1=M1/K1$	$B1*F1-C1*E1$	$C1*D1-A1*F1$	$A1*E1-B1*D1$	$SQRT(O1^2+P1^2+R1^2)$
1,0932	-19	-8	10	22,9129

T	U	V	W	X
$\cos(\bar{a}, \bar{b})$	$\bar{c} \cdot (\bar{a} \times \bar{b})$	$[\bar{c} \times (\bar{a} \times \bar{b})]_x$	$[\bar{c} \times (\bar{a} \times \bar{b})]_y$	$[\bar{c} \times (\bar{a} \times \bar{b})]_z$
$M1/(J1*K1)$	$G1*O1+H1*P1+I1*R1$	$H1*R1-I1*P1$	$I1*O1-G1*R1$	$G1*P1-H1*O1$
0,2922	30	10	20	35

Conform rezultatelor din tabel, mărimile cerute sunt:

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = 7 ; \quad pr_{\bar{b}} \bar{a} = 1,0932 ;$$

$$\bar{a} \times \bar{b} = -19\bar{i} - 8\bar{j} + 10\bar{k} ;$$

$$|\bar{a} \times \bar{b}| = 22,9129 ;$$

$$\cos(\bar{a}, \bar{b}) = 0,2922 ;$$

$$\bar{c} \cdot (\bar{a} \times \bar{b}) = 30 ;$$

$$\bar{c} \times (\bar{a} \times \bar{b}) = 10\bar{i} + 20\bar{j} + 35\bar{k}$$

**1.1.2 Se consideră punctele  $A_1(1,-2,3)$ ,  $A_2(2,4,1)$ ,  $A_3(4,5,6)$ . Se cere:**

- să se exprime analitic vectorii  $\overline{A_1A_2}$  și  $\overline{A_2A_3}$ ,
- produsul lor scalar al vectorilor  $\overline{A_1A_2}$  și  $\overline{A_2A_3}$ ,
- să se calculeze unghiurile celor doi vectori.

Problema s-a rezolvat folosind relațiile prezentate în rezumatul de teorie cu ajutorul programului Microsoft-Excel, conform algoritmului prezentat în continuare.

**ALGORITMUL DE CALCUL PENTRU PROGRAMUL MICROSOFT EXCEL ȘI REZULTATELE OBȚINUTE PENTRU PROBLEMA 1.1.2**

DATE DE INTRARE										DATE DE IEȘIRE		
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
Nr.	$x_{A1}$	$y_{A1}$	$z_{A1}$	$x_{A2}$	$y_{A2}$	$z_{A2}$	$x_{A3}$	$y_{A3}$	$z_{A3}$	$(\overline{A_1A_2})_x$	$(\overline{A_1A_2})_y$	$(\overline{A_1A_2})_z$
0										D1-A1	E1-B1	F1-C1
1	1	-2	3	2	4	1	4	5	6	1	6	-2

M	N	O	P	R	S	T
$(\overline{A_2A_3})_x$	$(\overline{A_2A_3})_y$	$(\overline{A_2A_3})_z$	$ \overline{A_1A_2} $	$ \overline{A_2A_3} $	$\overline{A_1A_2} \cdot \overline{A_2A_3}$	$\cos \alpha$
G1-D1	H1-E1	I1-F1	$\text{SQRT}(J1^2+K1^2+L1^2)$	$\text{SQRT}(M1^2+N1^2+O1^2)$	$J1*M1+K1*N1+L1*O1$	$S1/(P1*R1)$
2	1	5	6,4031	5,4772	-2	-0,057

Conform rezultatelor din tabel, expresiile analitice ale celor doi vectori, produsul lor scalar și unghiul dintre vectori, conform rezultatelor din tabel sunt:

$$\begin{aligned} \overline{A_1A_2} &= \bar{i} + 6\bar{j} - 2\bar{k}; & \overline{A_2A_3} &= 2\bar{i} + \bar{j} + 5\bar{k} \\ \overline{A_1A_2} \cdot \overline{A_2A_3} &= -2; & \cos \alpha &= -0,057 \end{aligned}$$

**PROBLEME PROPUSE**

*Aceiași enunț ca la probleme 1.1.1 pentru vectorii:*

**1.1.3.**  $\bar{a} = 2\bar{i} - \bar{j} + 3\bar{k}; \quad \bar{b} = \bar{j} + 4\bar{k}; \quad \bar{c} = -2\bar{i} - \bar{j}$

**1.1.4.**  $\bar{a} = 2\bar{i} - \bar{j} - 3\bar{k}; \quad \bar{b} = \bar{i} + \bar{j} + 4\bar{k}; \quad \bar{c} = -2\bar{i} + \bar{j} + 2\bar{k}$

**1.1.5.**  $\bar{a} = \bar{i} + 3\bar{k}; \quad \bar{b} = 5\bar{j} + \bar{k}; \quad \bar{c} = -2\bar{i} + 4\bar{j}$

**1.1.6.**  $\bar{a} = 2\bar{i}; \quad \bar{b} = 4\bar{i} + 5\bar{j} + 4\bar{k}; \quad \bar{c} = -2\bar{i} + \bar{j} - \bar{k}$

**1.1.7.**  $\bar{a} = 2\bar{i} + \bar{j} + 3\bar{k}; \quad \bar{b} = 5\bar{j} - 4\bar{k}; \quad \bar{c} = 2\bar{i} - \bar{j}$

**1.1.8.**  $\bar{a} = 2\bar{i} - 9\bar{j} + 3\bar{k}; \quad \bar{b} = 6\bar{j} + \bar{k}; \quad \bar{c} = 2\bar{i} + 6\bar{j} - 4\bar{k}$

*Aceiași enunț ca la probleme 1.1.2 pentru punctele:*

**1.1.9.**  $A_1(0,1,3), A_2(2,4,6), A_3(-4,5,8).$

**1.1.10.**  $A_1(1,-5,3), A_2(2,4,-4), A_3(4,5,0).$

**1.1.11.**  $A_1(1,-2,0), A_2(7,4,-1), A_3(4,0,6).$

**1.1.12.**  $A_1(1,-6,3), A_2(8,0,1), A_3(0,5,6).$

## 1.2 REDUCEREA FORȚELOR CONCURENTE COPLANARE

### PROBLEME REZOLVATE

**1.2.1. Se consideră un punct material asupra căruia acționează un sistem de 4 forțe coplanare  $\{\bar{F}_i\}_{i=1, \dots, 4}$  (fig. 1.2.1.a) având modulele și direcțiile față de  $Ox$**

**date de:**  $|\bar{F}_1| = 8\sqrt{2}F$ ,  $\alpha_1 = \frac{\pi}{4}$ ;  $|\bar{F}_2| = 2F$ ,  $\alpha_2 = \pi$ ;  $|\bar{F}_3| = 3F$ ,  $\alpha_3 = -\frac{\pi}{2}$ ;  $|\bar{F}_4| = 2\sqrt{3}F$ ,  $\alpha_4 = -\frac{\pi}{3}$

**Se cere să se determine rezultanta celor patru forțe (ca mărime, direcție și sens).**

#### Rezolvare:

Pentru a determina rezultanta celor patru forțe din fig. 1.2.1.a se aplică teorema proiecțiilor pe axele sistemului  $Oxy$ : mărimea proiecției rezultantei după cele două direcții  $Ox$  și  $Oy$  este egală suma mărimilor proiecțiilor forțelor:

$$X = \sum_{i=1}^4 X_i = |\bar{F}_1| \cos \frac{\pi}{4} + |\bar{F}_2| \cos \pi + |\bar{F}_3| \cos \left(-\frac{\pi}{2}\right) + |\bar{F}_4| \cos \left(-\frac{\pi}{3}\right) = (6 + \sqrt{3})F$$

$$Y = \sum_{i=1}^4 Y_i = |\bar{F}_1| \sin \frac{\pi}{4} + |\bar{F}_2| \sin \pi + |\bar{F}_3| \sin \left(-\frac{\pi}{2}\right) + |\bar{F}_4| \sin \left(-\frac{\pi}{3}\right) = 2F$$

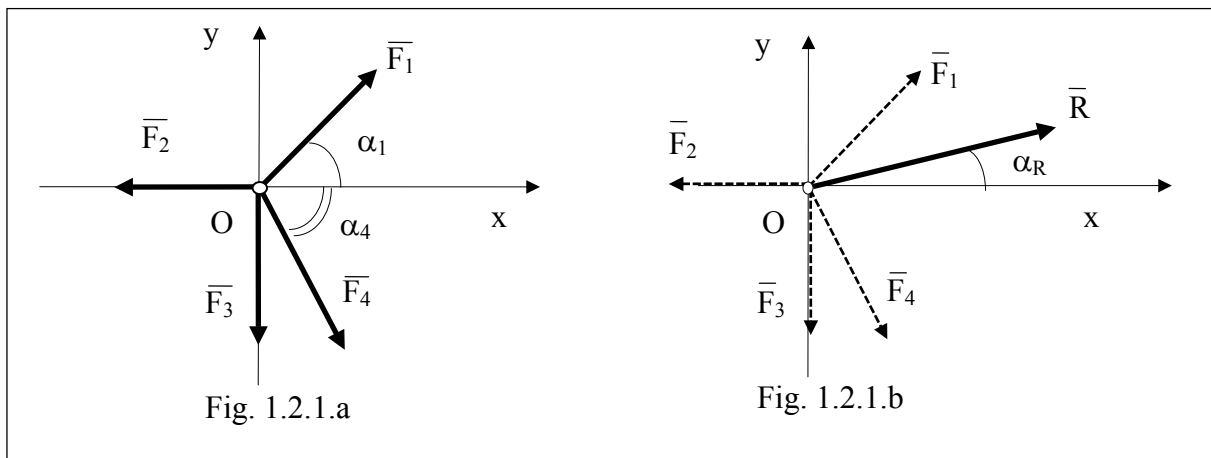
Expresia analitică a rezultantei celor trei forțe și mărimea ei sunt date de:

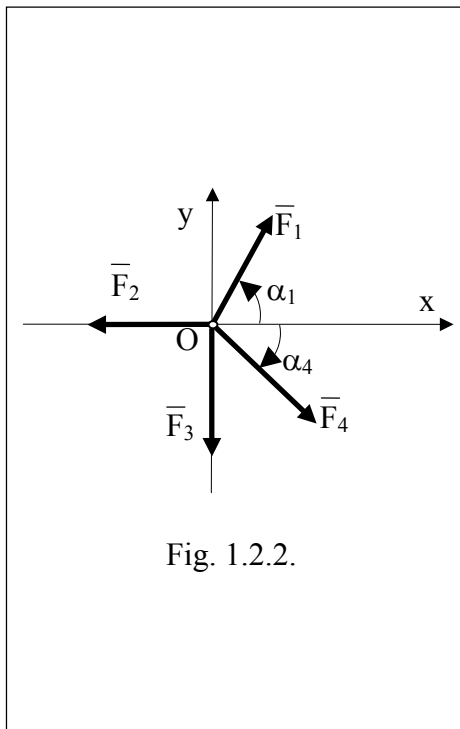
$$\bar{R} = X\bar{i} + Y\bar{j} = (6 + \sqrt{3})F\bar{i} + 2F\bar{j};$$

$$|\bar{R}| = R = \sqrt{X^2 + Y^2} = F\sqrt{43 + 12\sqrt{3}}$$

Direcția și sensul rezultantei sunt date de mărimea unghiului  $\alpha_R$  pe care aceasta îl face cu axa  $Ox$  (fig 1.2.1.b) :

$$\operatorname{tg} \alpha_R = \frac{Y}{X} = \frac{2}{6 + \sqrt{3}} = 0,258; \quad \alpha_R = 14,502^\circ$$





**1.2.2** *Asupra unui punct material O acționează forțele concurente și coplanare  $\{\bar{F}_i\}_{i=1,..,4}$  având mărimile, direcțiile și sensurile din fig.S1.2.2.*

*Se cunosc:*

$$|\bar{F}_1| = 4\sqrt{3}F, \quad \alpha_1 = \frac{\pi}{6}; \quad |\bar{F}_2| = 2F, \quad \alpha_2 = \pi$$

$$|\bar{F}_3| = 6F, \quad \alpha_3 = \frac{3\pi}{2}; \quad |\bar{F}_4| = 2\sqrt{2}F; \quad \alpha_4 = -\frac{\pi}{4}$$

*Se cere: Expresia analitică a rezultantei forțelor și unghiul pe care îl face aceasta cu axa Ox.*

Răspuns:  $\bar{R} = 2\sqrt{3}P\bar{i} - 2P\bar{j}$  ;  $\alpha_R = -\frac{\pi}{6}$

Problema s-a rezolvat și cu ajutorul programului Microsoft-Excel, conform algoritmului prezentat în continuare.

**ALGORITMUL DE CALCUL PENTRU PROGRAMUL EXCEL ȘI REZULTATE OBTINUTE PENTRU PROBLEMA 1.2.2**

**DATE DE INTRARE**

	A	B	C	D	E	F	G	H
Nr.	$F_1/F$	$F_2/F$	$F_3/F$	$F_4/F$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\alpha_3$	$\alpha_4$
0								
1	6,9292	2	6	2,8284	$\pi/6$	$\pi$	$3\pi/2$	$-\pi/4$

**DATE DE IESIRE**

J	K	L	M	N
$X/F$	$Y/F$	$R/F$	$\text{tg } \alpha_R$	$\alpha_R \text{ (rad)}$
$A1*\cos E1+B1*\cos F1+C1*\cos G1+D1*\cos H1$	$A1*\sin E1+B1*\sin F1+C1*\sin G1+D1*\sin H1$	$\text{SQRT}(J1^2+K1^2)$	$K1/J1$	$\text{arctg} M1$
3,4641 ( $2\sqrt{3}$ )	-2	4	-0,5773	-0,5236 ( $-\pi/6$ )

### 1.3 REDUCEREA FORTELOR CONCURENTE SPAȚIALE

#### PROBLEME REZOLVATE

**1.3.1.** *Asupra unui punct material  $M$  acționează un sistem de 4 forțe concurente  $\{\bar{F}_i\}_{i=1, \dots, 4}$  având modulele:  $|\bar{F}_1| = 2\sqrt{10}F$ ,  $|\bar{F}_2| = 5F$ ,  $|\bar{F}_3| = 3\sqrt{37}F$ ,  $|\bar{F}_4| = 4\sqrt{5}F$  și direcțiile date de muchiile sau diagonalele unui paralelipiped dreptunghic ca în fig. S1.3.1 ( $M \equiv O$ ); se cunosc:  $OA = a$ ,  $OC = 2a$ ,  $OO' = 6a$ .*

*Se cere să se determine rezultanta forțelor (mărimea, direcția și sensul).*

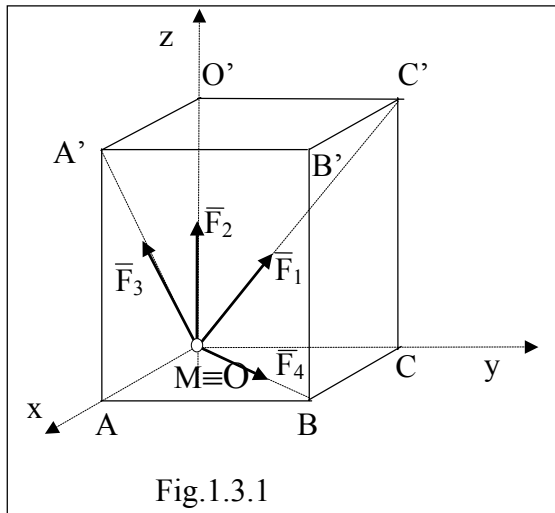


Fig.1.3.1

#### Rezolvare:

Expresiile analitice ale celor patru forțe față de sistemul de referință  $Oxyz$  ales ( $M \equiv O$ ) sunt:

$$\begin{aligned} \bar{F}_1 &= |\bar{F}_1| \cdot \text{vers} \bar{F}_1 = |\bar{F}_1| \cdot \text{vers} \overline{OC'} = \\ &= 2\sqrt{10}F \cdot \frac{x_c \bar{i} + y_c \bar{j} + z_c \bar{k}}{\sqrt{x_c^2 + y_c^2 + z_c^2}} = 2F\bar{j} + 3F\bar{k} \end{aligned}$$

$$\bar{F}_2 = |\bar{F}_2| \cdot \text{vers} \bar{F}_2 = |\bar{F}_2| \cdot \text{vers} \overline{OO'} = 5F\bar{k}$$

$$\bar{F}_3 = |\bar{F}_3| \cdot \text{vers} \bar{F}_3 = |\bar{F}_3| \cdot \text{vers} \overline{OA'} = 3\sqrt{37}F \frac{a\bar{i} + 6a\bar{k}}{\sqrt{a^2 + (6a)^2}} = 3F\bar{i} + 18F\bar{k}$$

$$\bar{F}_4 = |\bar{F}_4| \cdot \text{vers} \bar{F}_4 = |\bar{F}_4| \cdot \text{vers} \overline{OB} = 4\sqrt{5}F \frac{a\bar{i} + 2a\bar{j}}{\sqrt{a^2 + (2a)^2}} = 4F\bar{i} + 8F\bar{j}$$

Expresia analitică a rezultantei este:

$$\bar{R} = \sum_{i=1}^4 \bar{F}_i = 7F\bar{i} + 10F\bar{j} + 29F\bar{k}$$

Proiecțiile rezultantei pe axele sistemului de coordonate  $Oxyz$  sunt:

$$X = 7F, \quad Y = 10F, \quad Z = 29F.$$

Mărimea rezultantei este dată de:

$$|\bar{R}| = R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} = 3\sqrt{110} F.$$

Direcția și sensul rezultantei este dată de unghiurile pe care le face cu axele sistemului de coordonate:

$$\cos \alpha_R = 0,222; \quad \alpha_R = 77,145^\circ$$

$$\cos \beta_R = 0,318; \quad \beta_R = 71,469^\circ$$

$$\cos \gamma_R = 0,921; \quad \gamma_R = 22,827^\circ$$

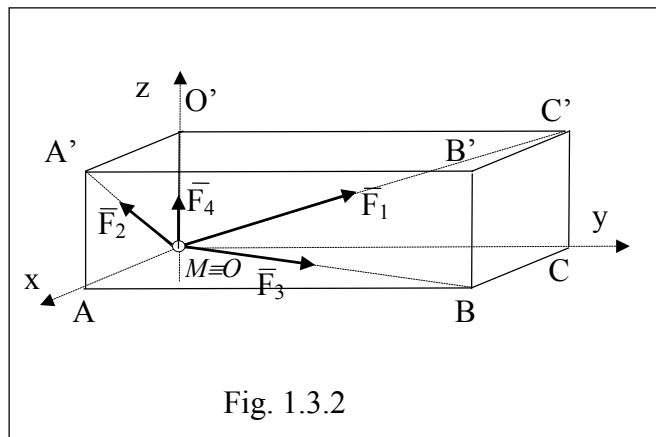
PROBLEME PROPUSE

**1.3.2.** *Asupra unui punct material  $M$  acționează forțele concurente  $\{\bar{F}_i\}_{i=1,\dots,4}$  având mărimile:  $|\bar{F}_1| = 3\sqrt{68}F, |\bar{F}_2| = 2\sqrt{13}F, |\bar{F}_3| = 4\sqrt{73}F, |\bar{F}_4| = 6F$ .*

*direcțiile și sensurile fiind date de muchiile sau diagonalele paralelipipedului dreptunghic din fig. 1.3.2 ( $M \equiv O$ ); se cunosc:  $OA=3a, OC=8a, OO'=2a$ .*

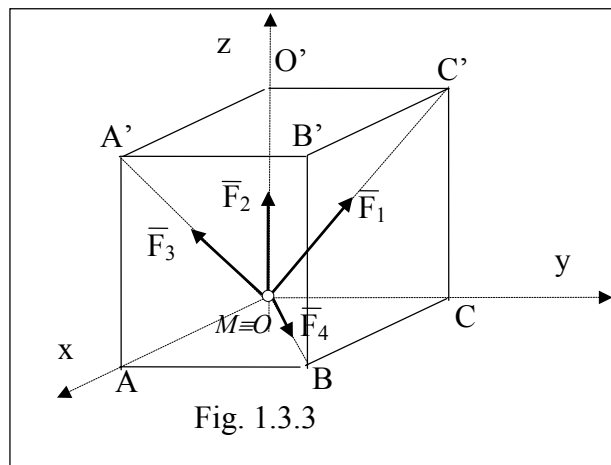
*Se cere expresia analitică a rezultantei forțelor și unghiurile pe care îl face aceasta cu axele de coordonate.*

$\bar{R} = 18F\bar{i} + 56F\bar{j} + 16F\bar{k}; \quad  \bar{R}  = 60,959F; \quad \alpha_R = 72,825^\circ; \beta_R = 23,270^\circ; \gamma_R = 74,783^\circ;$
--



**1.3.3.** *Același enunț ca la problema 1.3.2 (fig. 1.3.3) cu datele:*

$$|\bar{F}_1| = \sqrt{29}F, |\bar{F}_2| = 4F, |\bar{F}_3| = \sqrt{34}F, |\bar{F}_4| = \sqrt{13}F, OA=3a, OC=2a, OO'=5a.$$



$\bar{R} = \sum_{i=1}^4 \bar{F}_i = 6F\bar{i} + 4F\bar{j} + 14F\bar{k}; \quad  \bar{R}  = 15,748F; \quad \alpha_R = 67,604^\circ, \beta_R = 75,285^\circ, \gamma_R = 27,252^\circ$
--

Problema 1.3.2 s-a rezolvat și cu ajutorul programului Microsoft-Excel, conform algoritmului prezentat în continuare.



**ALGORITMUL DE CALCUL PENTRU PROGRAMUL  
MICROSOFT EXCEL PENTRU PROBLEMA 1.3.2**

**DATE DE INTRARE**

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
Nr.	$x_1/a$	$y_1/a$	$z_1/a$	$x_2/a$	$y_2/a$	$z_2/a$	$x_3/a$	$y_3/a$	$z_3/a$	$x_4/a$	$y_4/a$	$z_4/a$	$F_1/F$
1	0	8	2	3	0	2	3	8	0	0	0	2	24,74

**DATE DE IESIRE**

N	O	P	Q	R	S
$F_2/F$	$F_3/F$	$F_4/F$	$(\text{vers}F_1)_x$	$(\text{vers}F_1)_y$	$(\text{vers}F_1)_z$
			$A1/[\text{SQRT}(A1^2+B1^2+C1^2)]$	$B1/[\text{SQRT}(A1^2+B1^2+C1^2)]$	$C1/[\text{SQRT}(A1^2+B1^2+C1^2)]$
7,2111	34,1760	6	0	0,9701	0,2425

T	U	V	W	X	Y
$(\text{vers}F_2)_x$	$(\text{vers}F_2)_y$	$(\text{vers}F_2)_z$	$(\text{vers}F_3)_x$	$(\text{vers}F_3)_y$	$(\text{vers}F_3)_z$
$D1/\text{SQRT}(D1^2+E1^2+F1^2)$	$E1/\text{SQRT}(D1^2+E1^2+F1^2)$	$F1/\text{SQRT}(D1^2+E1^2+F1^2)$	$G1/[\text{SQRT}(G1^2+H1^2+I1^2)]$	$H1/[\text{SQRT}(G1^2+H1^2+I1^2)]$	$I1/[\text{SQRT}(G1^2+H1^2+I1^2)]$
0,8320	0	0,5547	0,3511	0,9363	0

Z	AA	AB	AC	AD	AE
$(\text{vers}F_4)_x$	$(\text{vers}F_4)_y$	$(\text{vers}F_4)_z$	X/F	Y/F	Z/F
$J1/\text{SQRT}(J1^2+K1^2+L1^2)$	$K1/\text{SQRT}(J1^2+K1^2+L1^2)$	$L1/\text{SQRT}(J1^2+K1^2+L1^2)$	$M1*Q1+N1*T1+O1*W1+P1*Z1$	$M1*R1+N1*U1+O1*X1+P1*AA1$	$M1*S1+N1*V1+O1*Y1+P1*AB1$
0	0	1	18	56	16

AF	AG	AH	AI
R/F	$\alpha_R$	$\beta_R$	$\gamma_R$
$\text{SQRT}(AC1^2+AD1^2+AE1^2)$	$\arccos(AC1/AF1)$	$\arccos(AD1/AF1)$	$\arccos(AE1/AF1)$
60,959	$72,825^0$	$23,270^0$	$74,783^0$

## 1.4. STATICA PUNCTULUI MATERIAL

### REZUMAT DE TEORIE

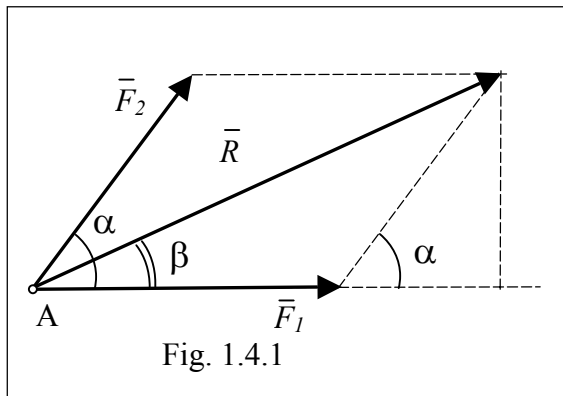
#### a. Principiul paralelogramului

Fiind date două forțe  $\vec{F}_1$  și  $\vec{F}_2$  care acționează asupra unui punct material liber A, *principiul paralelogramului* postulează că *efectul celor două forțe este același cu al unei forțe rezultante  $\vec{R}$ , care este diagonala mare a paralelogramului având ca laturi forțele  $\vec{F}_1$  și  $\vec{F}_2$*  (fig. 1.4.1)

Sunt valabile următoarele relații:

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2; \quad R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1 F_2 \cos \alpha}; \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{F_2 \sin \alpha}{F_1 + F_2 \cos \alpha};$$

$$\frac{R}{\sin \alpha} = \frac{F_1}{\sin(\alpha - \beta)} = \frac{F_2}{\sin \beta}$$



#### b. Teorema proiecțiilor

Fiind dat un sistem de forțe, concurente într-un punct O din spațiu,  $\{\vec{F}_i\}_{i=1,2,\dots,n}$  acesta se reduce (sau este echivalent) în punctul O cu o forță rezultantă  $\vec{R}$ , care se obține aplicând succesiv principiul paralelogramului enunțat mai sus:  $\vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i$ .

Dacă se notează cu  $X_i, Y_i, Z_i$ , proiecțiile unei forțe oarecare  $F_i$  a sistemului și cu  $X, Y, Z$  proiecțiile forței rezultante  $\vec{R}$  pe axele triedrului triortogonal drept Oxyz, atunci sunt valabile următoarele relații:

$$X = \sum_{i=1}^n X_i; \quad Y = \sum_{i=1}^n Y_i; \quad Z = \sum_{i=1}^n Z_i.$$

Aceste relații *teorema proiecțiilor care se enunță astfel*: proiecția rezultantei pe o direcție oarecare este egală cu suma proiecțiilor tuturor forțelor sistemului după acea direcție. Sunt valabile următoarele relații:

$$\vec{R} = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}$$

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} = \sqrt{(\sum X_i)^2 + (\sum Y_i)^2 + (\sum Z_i)^2}$$

#### c. Axioma legăturilor

Dacă asupra unui punct M din spațiu supus la legături acționează un sistem de forțe  $\{\vec{F}_i\}_{i=1,2,\dots,n}$  (a cărui rezultantă se notează cu  $\vec{R}^a$ ), *conform axiomei*

*legăturilor* orice legături geometrice pot fi întotdeauna suprimate și înlocuite cu forțe corespunzătoare (a căror rezultantă se notează cu  $\bar{R}^{leg}$ ).

*Din punct de vedere geometric* punctul material poate fi considerat ca un punct material liber, iar *din punct de vedere mecanic* constrângerile au fost înlocuite cu forțe de legătură.

Teorema echilibrului punctului material supus la legături: *condiția necesară și suficientă pentru ca un punct material să rămână în echilibru sub acțiunea forțelor exterioare și de legătură este ca rezultanta lor să fie nulă:*

$$\bar{R}^a + \bar{R}^{leg} = 0$$

$$X^a + X^{leg} = 0; \quad Y^a + Y^{leg} = 0; \quad Z^a + Z^{leg} = 0;$$

Din punct de vedere al naturii forțelor de legătură, legăturile punctului material pot fi *legături fără frecare (ideale)* și *legături cu frecare (reale)*.

### **b. Echilibrul punctului material supus la legături cu frecare**

Un punct material aflat pe o suprafață cu frecare nu va părăsi poziția de repaus atât timp cât rezultanta forțelor aplicate se află în interiorul conului de frecare (având axa după normala la suprafață și unghiul la vârf  $2\varphi$ ). Forța de frecare  $\bar{T}$  respectă următoarele legi ale frecării uscate (legile lui COULOMB):

- modulul forței de frecare  $|\bar{T}_{max}|$  este proporțional cu reacțiunea normală  $N$ ;
- modulul  $|\bar{T}_{max}|$  depinde de natura corpurilor și de starea suprafețelor de contact:  $|\bar{T}_{max}| = \mu N$  unde  $\mu = tg\varphi$  este coeficientul de frecare de alunecare, iar  $\varphi$  este unghiul de frecare;
- modulul  $|\bar{T}_{max}|$  nu depinde de mărimea suprafeței de contact. Sensul forței de frecare de alunecare se opune totdeauna tendinței de deplasare.

## **PROBLEME REZOLVATE**

**1.4.1. Se consideră o sferă  $M$  de greutate  $G$  care se reazemă fără frecare pe un plan înclinat cu unghiul  $\alpha$  și este prinsă printr-un fir de un punct  $A$ ; firul face cu verticala unghiul  $\beta$  (vezi fig. 1.4.1.a).**

**Se cere să se determine mărimea reacțiunii normale  $\bar{N}$  și a tensiunii din fir  $\bar{S}$ .**

**Rezolvare:**

Ecuția vectorială de echilibru după introducerea forțelor de legătură (conform axiomei legăturilor) se scrie :

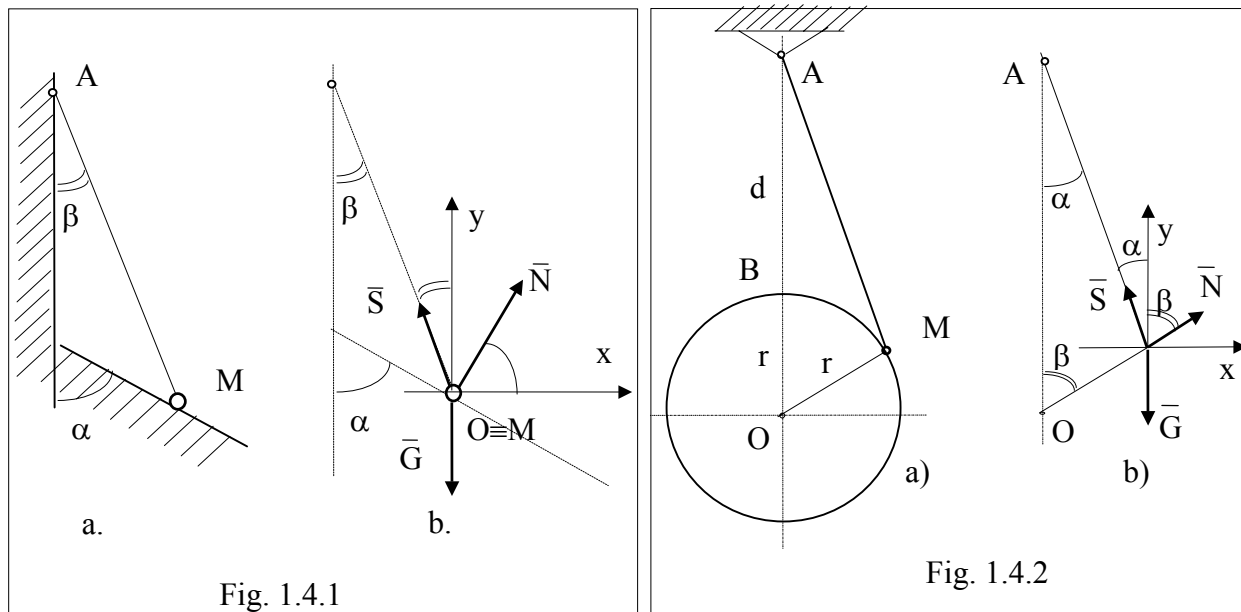
$$\bar{G} + \bar{S} + \bar{N} = 0 \tag{a}$$

Alegând axele  $Ox$  și  $Oy$  în mod convenabil (fig.1.4.1.b) și proiectând pe acestea ecuația vectorială de echilibru, se obțin ecuațiile:

$$\begin{cases} \sum X_i = 0 \\ \sum Y_i = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N \cos \alpha - S \sin \beta = 0 \\ N \sin \alpha + S \cos \beta - G = 0 \end{cases} \quad (b)$$

Înmulțind, prima ecuație cu  $\cos \beta$  și a doua cu  $\sin \beta$  și însumându-le membru cu membru se obține:

$$N = G \frac{\sin \beta}{\cos(\alpha - \beta)} ; \quad S = G \frac{\cos \alpha}{\cos(\alpha - \beta)} \quad (c)$$



**1.4.2. Se consideră o bilă de greutate  $G$  care se reazemă pe suprafața unei sfere de rază  $r$ , fiind legată cu un fir de lungime  $AM = \ell$  de punctul fix  $A$  aflat la distanța  $AB = d$ , față de suprafața sferei (fig.1.4.2.a).**

**Se cere mărimea tensiunii din fir  $S$  și a reacțiunii  $N$ .**

**Rezolvare:**

Ecuția vectorială de echilibru se scrie:  $\vec{G} + \vec{S} + \vec{N} = 0 \quad (a)$

Dacă se introduc unghiurile  $\alpha$  și  $\beta$  și se aleg convenabil axele  $Ox$  și  $Oy$  (ca în fig.S1.5.2.b) condiția de echilibru se scrie:

$$\begin{cases} \sum X_i = 0 \\ \sum Y_i = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -S \sin \alpha + N \sin \beta = 0 \\ S \cos \alpha + N \cos \beta - G = 0 \end{cases} \quad (b)$$

Multiplicând prima ecuație (b) cu  $\cos \beta$  și a doua cu  $\sin \beta$  și însumându-le membru cu membru se obține:

$$N = G \frac{\sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)} ; \quad S = G \frac{\sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)} \quad (c)$$

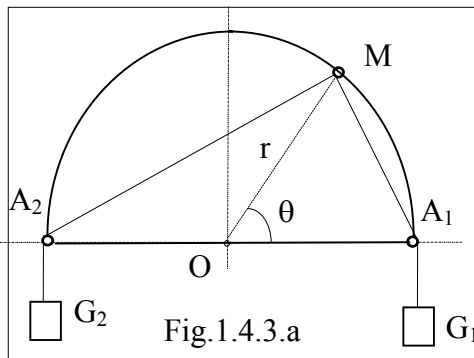
Din teorema sinusurilor aplicată în triunghiul OAM, avem:

$$\frac{\ell}{\sin \beta} = \frac{r}{\sin \alpha} = \frac{d+r}{\sin(\alpha+\beta)} \Rightarrow \frac{\sin \alpha}{\sin(\alpha+\beta)} = \frac{r}{d+r}; \frac{\sin \beta}{\sin(\alpha+\beta)} = \frac{\ell}{d+r}$$

deci se obține:  $N = G \frac{r}{d+r}; \quad S = G \frac{\ell}{d+r}$  (d)

**1.4.3. Se consideră un inel M de greutate neglijabilă care se reazemă cu frecare (coeficientul de frecare fiind  $\mu$ ) pe un semicerc de rază R. De inel sunt legate două fire care trec fără frecare prin inelele fixe  $A_1$  și  $A_2$  (fig.1.4.3). La capetele firelor sunt legate două corpuri de greutate  $G_1$  și  $G_2$ . Se cere să se determine raportul greutăților  $G_1/G_2$  pentru ca inelul să rămână în repaus pentru un unghi  $\theta$  dat.**

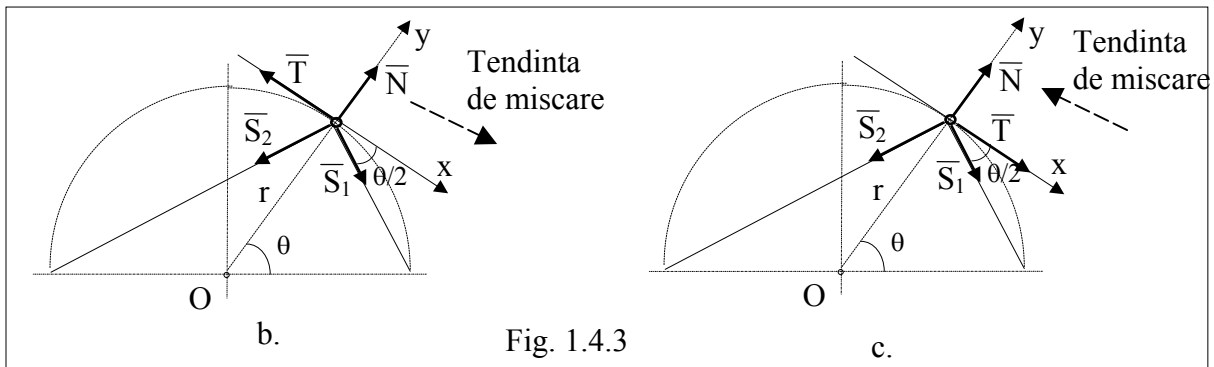
**Rezolvare:**



a) Se consideră mai întâi că inelul M are tendința de alunecare spre punctul  $A_1$  (fig. 1.4.3.b); se aleg ca axe de coordonate tangenta și normala la cerc în punctul M

Ecuția de echilibru se scrie:

$$\vec{S}_1 + \vec{S}_2 + \vec{T} + \vec{N} = 0; \quad (a)$$



sau în proiecții pe axe:

$$\sum X_i = 0 \Rightarrow S_1 \cos \frac{\theta}{2} - S_2 \sin \frac{\theta}{2} - T = 0 \quad (b)$$

$$\sum Y_i = 0 \Rightarrow -S_1 \sin \frac{\theta}{2} - S_2 \cos \frac{\theta}{2} + N = 0$$

Condiția fizică a frecării este:  $|\vec{T}| \leq \mu |\vec{N}|$ . (c)

Din ecuațiile (b) rezultă:

$$T = S_1 \cos \frac{\theta}{2} - S_2 \sin \frac{\theta}{2}; \quad N = S_1 \sin \frac{\theta}{2} + S_2 \cos \frac{\theta}{2} \quad (d)$$

care introduse în (c) și ținând seama că tensiunile din fir pentru cele două ramuri ale firului au mărimile  $S_1=G_1$  și  $S_2=G_2$ , conduc la:

$$\frac{G_1}{G_2} \leq \frac{\sin \frac{\theta}{2} + \mu \cos \frac{\theta}{2}}{\cos \frac{\theta}{2} - \mu \sin \frac{\theta}{2}} \quad (e)$$

b. Se consideră acum cealaltă tendință de alunecare a inelului M spre punctul  $A_2$  (fig. 1.4.3.c), ecuațiile de echilibru se scriu analog cu cele din primul caz, schimbând semnul din fața lui  $\mu$  și sensul inegalității (e)

$$\frac{G_1}{G_2} \geq \frac{\sin \frac{\theta}{2} - \mu \cos \frac{\theta}{2}}{\cos \frac{\theta}{2} + \mu \sin \frac{\theta}{2}} \quad (f)$$

Deci valorile pe care le poate lua raportul  $G_1/G_2$ , sunt cuprinse în intervalul:

$$\frac{\sin \frac{\theta}{2} - \mu \cos \frac{\theta}{2}}{\cos \frac{\theta}{2} + \mu \sin \frac{\theta}{2}} \leq \frac{G_1}{G_2} \leq \frac{\sin \frac{\theta}{2} + \mu \cos \frac{\theta}{2}}{\cos \frac{\theta}{2} - \mu \sin \frac{\theta}{2}}, \quad (g)$$

care se mai scrie sub forma:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\theta}{2} - \varphi\right) \leq \frac{G_1}{G_2} \leq \operatorname{tg}\left(\frac{\theta}{2} + \varphi\right) \quad (h)$$

**1.4.4. Se consideră un inel M de greutate neglijabilă care se reazemă cu frecare pe un cerc de rază r. De inel sunt legate două fire care trec prin două inele fixe în  $A_1$  și  $A_2$  fără frecare. La capetele firelor sunt legate două corpuri de greutate  $G_1$  și  $G_2$  (ca în fig.1.4.4.a). Se cere raportul  $G_1/G_2$  pentru ca punctul M să rămână în repaus în poziția dată de unghiul  $\theta$ , dacă se consideră cunoscute coeficientul de frecare  $\mu$  și  $\theta$ .**

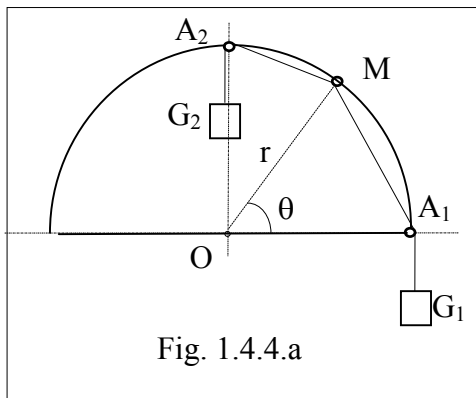


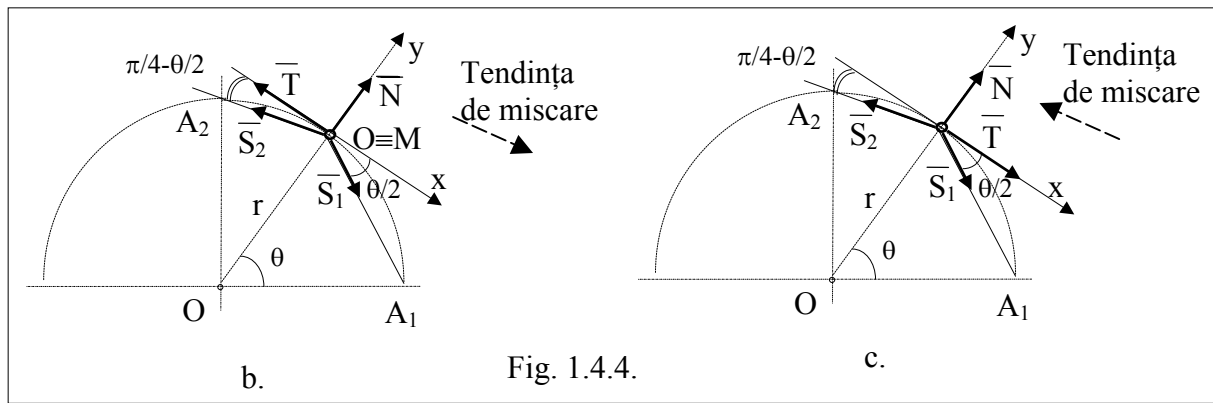
Fig. 1.4.4.a

**Rezolvare:**

1. Se consideră mai întâi că inelul M are tendința de alunecare spre punctul  $A_1$  (fig. 1.4.4.b); se alege ca axe de coordonate tangenta și normala la cerc în punctul M

Ecuția de echilibru se scrie:

$$\vec{S}_1 + \vec{S}_2 + \vec{T} + \vec{N} = 0 ; \quad (a)$$



sau în proiecții pe axe:

$$\sum X_i = 0 \Rightarrow S_1 \cos \frac{\theta}{2} - S_2 \cos \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2} \right) - T = 0 \quad (b)$$

$$\sum Y_i = 0 \Rightarrow -S_1 \sin \frac{\theta}{2} - S_2 \sin \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2} \right) + N = 0$$

$$\text{condiția fizică a frecării: } T \leq \mu N, \quad (c)$$

Înlocuind în (c) expresiile lui  $N$  și  $T$  rezultate din ecuațiile (b) avem:

$$S_1 \cos \frac{\theta}{2} - S_2 \cos \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2} \right) \leq \mu \left[ S_1 \sin \frac{\theta}{2} + S_2 \sin \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2} \right) \right] \quad (d)$$

și ținând seama că tensiunile din fir pentru cele două ramuri ale firului au mărimile:  $S_1 = G_1$  și  $S_2 = G_2$  se obține:

$$\frac{G_1}{G_2} \leq \frac{\cos \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2} \right) + \mu \sin \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2} \right)}{\cos \frac{\theta}{2} - \mu \sin \frac{\theta}{2}} \quad (e)$$

b) Se consideră cealaltă tendință de alunecare a inelului  $M$  (spre  $A_2$ , fig.1.4.4.c), ecuațiile de echilibru se scriu analog, obținându-se, prin schimbarea semnului din fața lui  $\mu$  și a sensului inegalității (e) relația:

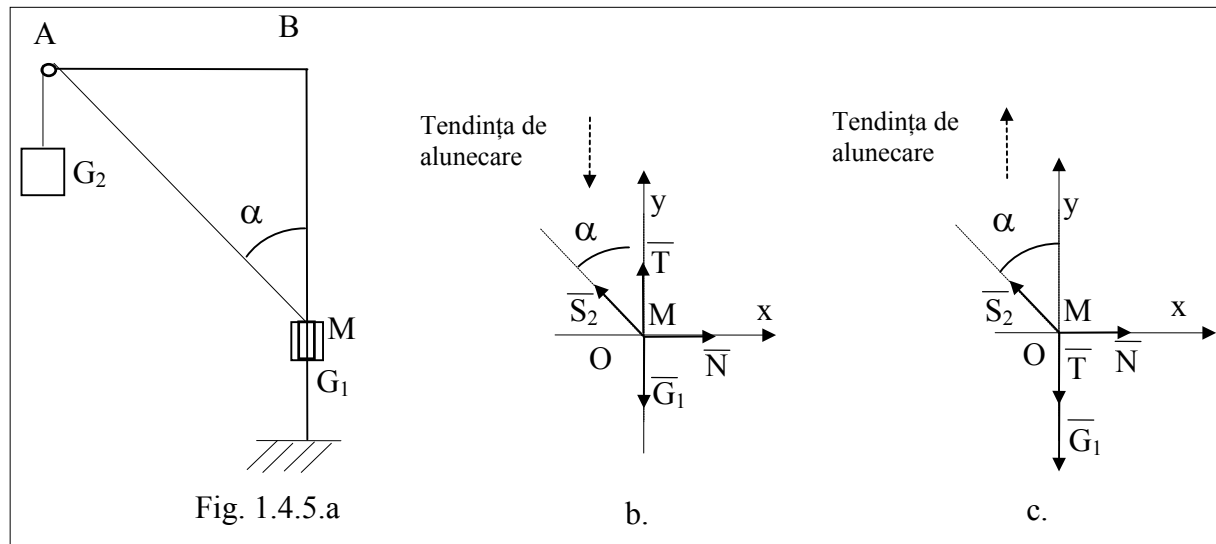
$$\frac{G_1}{G_2} \geq \frac{\cos \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2} \right) - \mu \sin \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2} \right)}{\cos \frac{\theta}{2} + \mu \sin \frac{\theta}{2}} \quad (f)$$

Condiția finală de echilibru deci se scrie:

$$\frac{\cos \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2} \right) - \mu \sin \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2} \right)}{\cos \frac{\theta}{2} + \mu \sin \frac{\theta}{2}} \leq \frac{G_1}{G_2} \leq \frac{\cos \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2} \right) + \mu \sin \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2} \right)}{\cos \frac{\theta}{2} - \mu \sin \frac{\theta}{2}} \quad (g)$$

sau forma echivalentă: 
$$\frac{\cos(\pi/4 - \theta/2 + \varphi)}{\cos(\theta/2 - \varphi)} \leq \frac{G_1}{G_2} \leq \frac{\cos(\pi/4 - \theta/2 - \varphi)}{\cos(\theta/2 + \varphi)} \quad (h)$$

**1.4.5.** Culisa  $M$  de greutate  $G_1$  se poate deplasa cu frecare pe bara verticală  $OB$ , coeficientul de frecare de alunecare fiind cunoscut:  $\mu$ . Culisa este legată de greutatea  $G_2$  prin intermediul unui fir și a unui scripete fără frecare  $A$ . Se cunosc:  $AB = a$  și  $BM = h$  (fig.1.4.5.a). Se cere greutatea  $G_2$  pentru ca echilibrul să aibă loc în poziția din figură.



**Rezolvare:**

a) Față de sistemul de axe  $Oxy$ , pentru tendința de deplasare a culisei în jos (fig. 1.4.5.b) forțele care acționează asupra culisei sunt indicate în figură; ecuațiile de echilibru în proiecții pe cele două axe se scriu:

$$\begin{cases} \sum X_i = 0 \\ \sum Y_i = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N - G_2 \sin \alpha = 0 \\ T + G_2 \cos \alpha - G_1 = 0 \end{cases} \quad (a)$$

$$T \leq \mu N, \text{ condiția fizică a frecării} \quad (b)$$

ținând seama că tensiunea din fir este  $S_2 = G_2$ , rezultă:

$$G_2 \geq \frac{G_1}{\cos \alpha + \mu \sin \alpha} \quad (c)$$

b) Pentru tendința de deplasare în sus a culisei (fig. 1.4.5.c) forța de frecare  $\bar{T}$  acționează în sens invers față de primul caz, ecuațiile de echilibru se scriu analog cu cele din primul caz, schimbând în relația (c) semnul din fața lui  $\mu$

și sensul inegalității:  $G_2 \leq \frac{G_1}{\cos \alpha - \mu \sin \alpha}$  (d)

Condiția finală de echilibru se scrie:

$$\frac{G_1}{\cos \alpha + \mu \sin \alpha} \leq G_2 \leq \frac{G_1}{\cos \alpha - \mu \sin \alpha} \quad (e)$$

sau sub forma echivalentă:

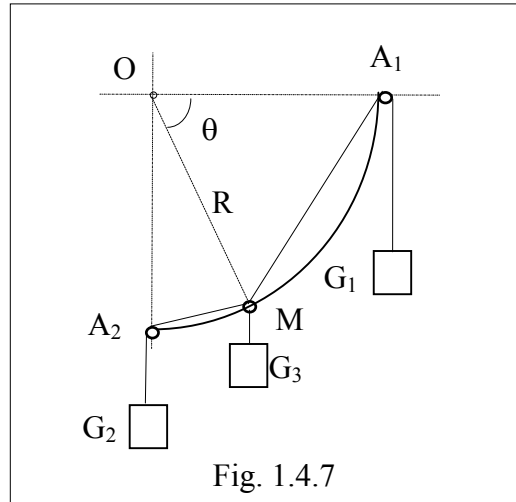
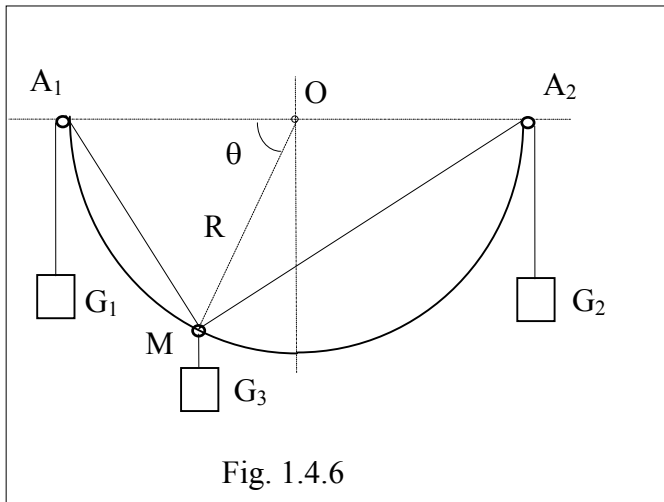


$$\frac{\sqrt{a^2 + h^2}}{h + \mu a} \cdot G_1 \leq G_2 \leq \frac{\sqrt{a^2 + h^2}}{h - \mu a} \cdot G_1 \quad (f)$$

PROBLEME PROPUSE

**1.4.6.** *Se consideră un inel M de greutate neglijabilă care se reazemă cu frecare ( $\mu$  coeficientul de frecare) pe un semicerc de rază R. De inel sunt legate: un corp de greutate  $G_3$  și două fire care trec fără frecare peste inelele fixe  $A_1$  și  $A_2$  (fig.1.4.6). La capetele firelor sunt legate două corpuri de greutate  $G_1$  și  $G_2$ .*

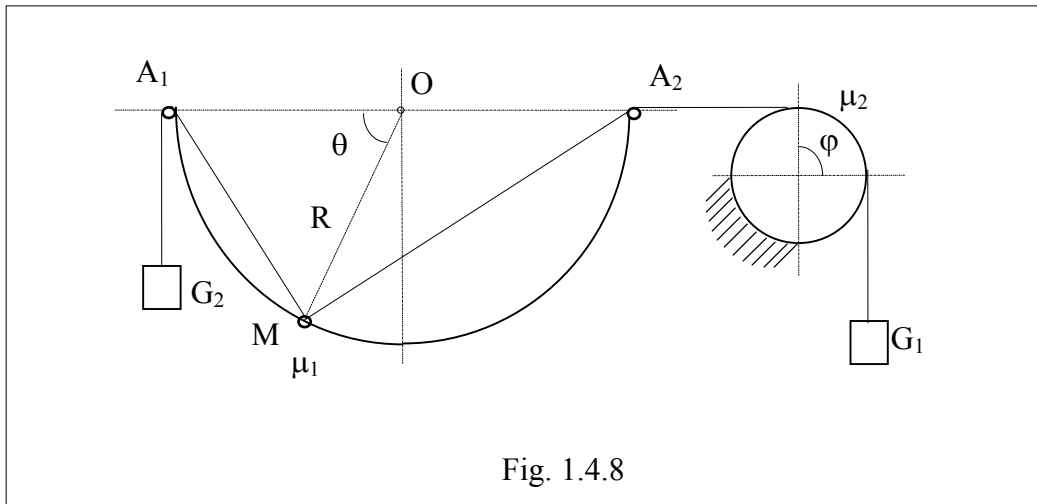
*Se cere raportul greutateților  $G_1 / G_2$  pentru ca inelul să rămână în repaus pentru unghiul  $\theta$  dat.*



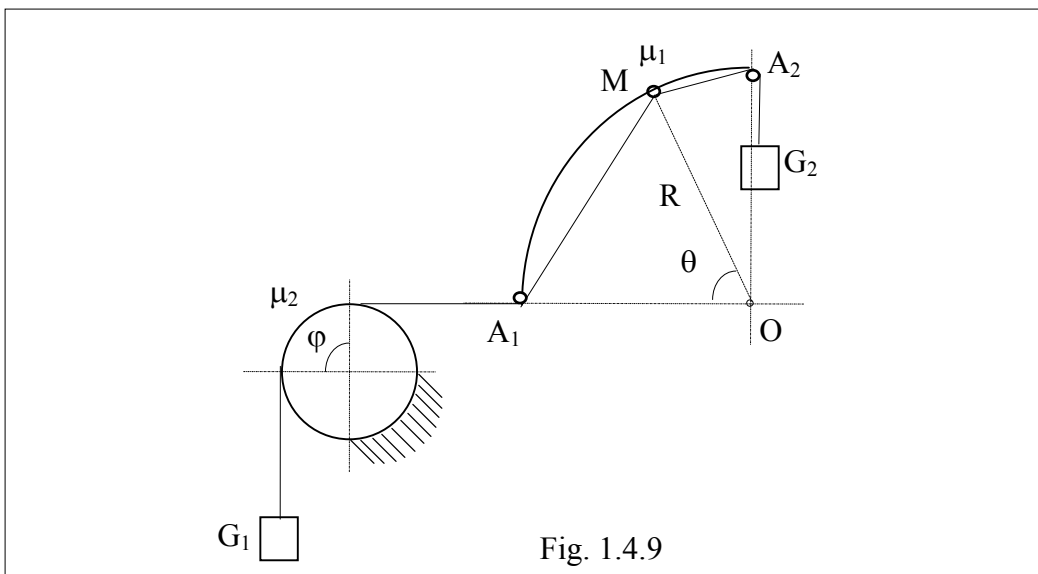
**1.4.7.** *Se consideră un inel M de greutate neglijabilă care se reazemă cu frecare ( $\mu$  coeficientul de frecare) pe un sfert de cerc de rază R. De inel sunt legate: un corp de greutate  $G_3$  și două fire care trec fără frecare peste inelele fixe  $A_1$  și  $A_2$  (fig.1.4.7). La capetele firelor sunt legate două corpuri de greutate  $G_1$  și  $G_2$ .*

*Se cere raportul greutateților  $G_1 / G_2$  pentru ca inelul să rămână în repaus pentru unghiul  $\theta$  dat.*

**1.4.8.** *Se consideră un inel M de greutate neglijabilă care se reazemă cu frecare ( $\mu_1$  coeficientul de frecare) pe un sfert de cerc de rază R. De inel sunt legate două fire care trec fără frecare peste inelele fixe  $A_1$  și  $A_2$ . La capetele firelor sunt legate două corpuri de greutate  $G_1$  și  $G_2$ , firul care susține corpul de greutate  $G_2$  fiind trecut cu frecare ( $\mu_2$  coeficientul de frecare) peste un cilindru fix ( $\varphi = \pi/2$ ) (fig.1.4.8). **Se cere** raportul greutateților  $G_1 / G_2$  pentru ca inelul să rămână în repaus pentru unghiul  $\theta$  dat.*



**1.4.9.** *Se consideră un inel M de greutate neglijabilă care se reazemă cu frecare ( $\mu_1$  coeficientul de frecare) pe un sfert de cerc de rază R. De inel sunt legate două fire care trec fără frecare peste inelele fixe  $A_1$  și  $A_2$ . La capetele firelor sunt legate două corpuri de greutate  $G_1$  și  $G_2$ , firul care susține corpul de greutate  $G_2$  fiind trecut cu frecare ( $\mu_2$  coeficientul de frecare) peste un cilindru fix ( $\varphi = \pi/2$ ) (fig.1.4.9). Se cere raportul greutăților  $G_1 / G_2$  pentru ca inelul să rămână în repaus pentru unghiul  $\theta$  dat.*



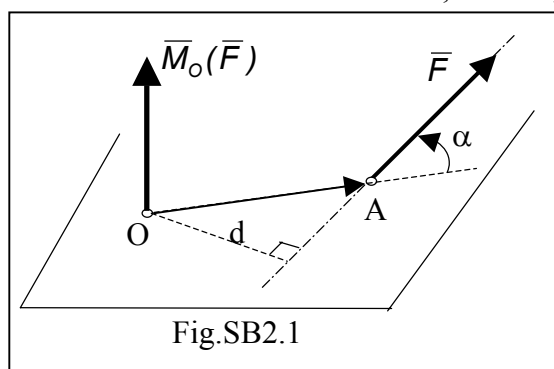
## CAPITOLUL II

### REDUCEREA FORTELOR

### APLICATE SOLIDULUI RIGID

#### REZUMAT DE TEORIE

##### a. Momentul unei forțe în raport cu un punct



O noțiune foarte importantă utilizată în Mecanica corpului rigid este aceea de *moment al unei forțe  $\vec{F}$  față de un punct oarecare O* (forța  $\vec{F}$  este aplicată într-un punct oarecare A din spațiu  $O \neq A$ ) care se definește prin :

$$\vec{M}_o(\vec{F}) = \vec{OA} \times \vec{F}$$

Din definiția produsului vectorial dată în capitolul I , rezultă că momentul unei forțe  $\vec{F}$  față de un punct O, este un vector aplicat în punctul O, perpendicular pe vectorii  $\vec{OA}$  și  $\vec{F}$  , sensul său fiind determinat de sensul de rotație al lui  $\vec{F}$  , după regula șurubului drept iar mărimea sa dată de:

$$|\vec{M}_o(\vec{F})| = |\vec{OA}| \cdot |\vec{F}| \cdot \sin \alpha = F \cdot d$$

unde:  $\alpha$  este unghiul dintre  $\vec{OA}$  și  $\vec{F}$  iar d este distanța de la punctul O la suportul forței  $\vec{F}$  (brațul forței, vezi fig. SB2.1).

Dacă punctul O este originea sistemului cartezian de axe, punctul A are coordonatele A(x,y,z) iar expresia analitică a forței este:  $\vec{F} = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}$  , atunci expresia analitică a momentului forței  $\vec{F}$  față de O este:

$$\vec{M}_o(\vec{F}) = \vec{OA} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ X & Y & Z \end{vmatrix} = (yZ - zY)\vec{i} + (zX - xZ)\vec{j} + (xY - yX)\vec{k}$$

Componentele lui  $\vec{M}_o(\vec{F})$  :  $L = yZ - zY$ ;  $M = zX - xZ$ ;  $N = xY - yX$  ,

reprezintă momentul forței  $\vec{F}$  față de cele trei axe Ox, Oy, Oz (așa cum rezultă din paragraful următor).

##### b. Momentul unei forțe în raport cu o axă oarecare

O altă noțiune importantă utilizată în Mecanica corpului rigid este aceea de *moment al unei forțe  $\vec{F}$  față de o axă  $\Delta$* , care se definește ca proiecția momentului forței  $\vec{F}$  față de un punct, care aparține axei  $\Delta$ , pe această axă:

$$M_{\Delta}(\vec{F}) = pr_{\Delta} \vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{\delta} \cdot \vec{M}_O(\vec{F})$$

$$M_{\Delta}(\vec{F}) = \vec{\delta} \cdot (\vec{OA} \times \vec{F}) = \begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ X & Y & Z \end{vmatrix}$$

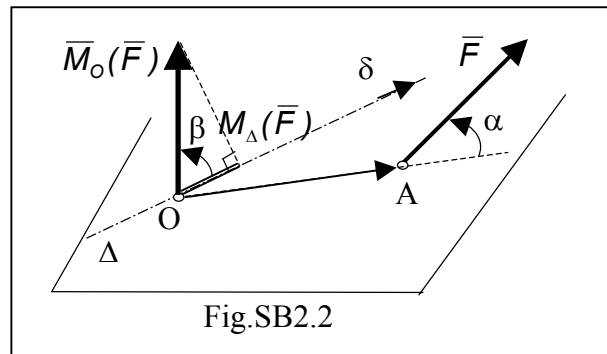
unde:  $\vec{\delta} = \text{vers}\Delta = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$

Se observă că dacă  $\Delta$  coincide cu axa Ox:

$$\vec{\delta} = \text{vers}Ox = \vec{i}$$

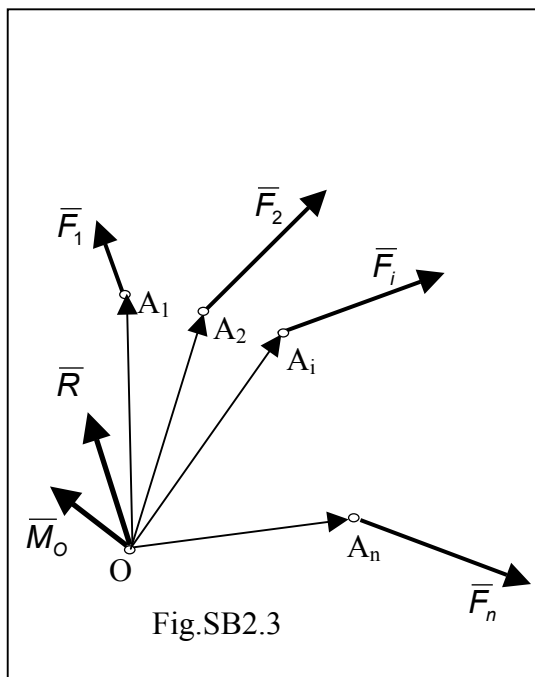
momentul forței  $\vec{F}$  în raport cu axa Ox este:  $M_{Ox} = yZ - zY = L$ .

Analog:  $M_{Oy} = zX - xZ = M$ ;  $M_{Oz} = xY - yX = N$ ;



### c. Torsorul de reducere al unui sistem de forțe într- un punct

Dacă se consideră o forță  $\vec{F}_i$  aplicată într-un punct  $A_i$  al unui rigid, efectul acestei forțe este același cu efectul celor două *elemente de reducere* a forței într-un punct O: forța  $\vec{F}_i$  și momentul forței în raport cu punctul O  $\vec{M}_O(\vec{F}_i)$ :



$\vec{F}_i$  aplicata in  $A_i \iff$

$\iff \left\{ \begin{matrix} \vec{F}_i \\ \vec{M}_O(\vec{F}_i) \end{matrix} \right\}$  aplicate in O

Dacă se consideră un sistem de forțe  $\vec{F}_i$  aplicate în punctele  $(A_i)_{i=1,2,\dots,n}$  și se face reducerea pentru fiecare forță a sistemului în punctul O, prin însumarea forțelor și momentelor concurente rezultate se obține un sistem echivalent cu sistemul dat format din două elemente (fig.SB2.3):

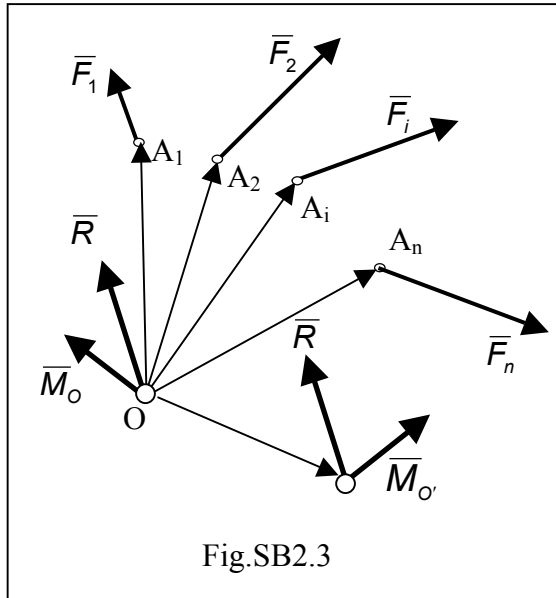
- Rezultanta:  $\vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i$

- Momentul resultant:

$$\vec{M}_O = \sum_{i=1}^n \vec{M}_O(\vec{F}_i) = \sum_{i=1}^n \vec{OA}_i \times \vec{F}_i.$$

Perechea formată din  $\bar{R}$  și  $\bar{M}_O$  se numește *torsorul de reducere al sistemului de forțe în punctul O*:  $\tau_O$ .

**d. Torsor minimal. Axa centrală**



Dacă se consideră un alt punct  $O'$  în care se face reducerea sistemului de forțe ( $O' \neq O$ ) rezultanta  $\bar{R} = \sum_{i=1}^n \bar{F}_i$  nu se modifică (primul invariant) iar momentul resultant se modifică conform relației:

$$\bar{M}_{O'} = \bar{M}_O + \overline{O'O} \times \bar{R} = \bar{M}_O - \overline{OO'} \times \bar{R}$$

Deci torsorii de reducere în  $O$  și  $O'$  se scriu:

$$\tau_O : \begin{cases} \bar{R} \\ \bar{M}_O \end{cases}; \quad \tau_{O'} : \begin{cases} \bar{R} \\ \bar{M}_{O'} = \bar{M}_O - \overline{OO'} \times \bar{R} \end{cases}$$

Dacă se înmulțește scalar relația de mai sus cu  $\bar{R}$ , se obține:  $\bar{M}_{O'} \cdot \bar{R} = \bar{M}_O \cdot \bar{R} = ct$ ; constanta acesta se numește *trinomul invariant* (al doilea invariant). Dacă se împarte trinomul invariant la modulul rezultantei se obține proiecția *momentului resultant* pe direcția rezultantei:

$$M_R = \bar{M}_O \cdot \bar{R} / |\bar{R}|$$

Pentru anumite puncte de reducere din spațiu, torsorul de reducere este format din doi vectori coliniari ( $\bar{R}; \bar{M}_R$ ) și se numește *torsor minimal*:

$$\tau_{min} : \begin{cases} \bar{R}; \\ \bar{M}_R = \frac{\bar{M}_O \cdot \bar{R}}{|\bar{R}|} \cdot \frac{\bar{R}}{|\bar{R}|} \end{cases}$$

*Axa centrală* reprezintă locul geometric al punctelor din spațiu unde făcând reducerea sistemului de forțe, rezultanta și momentul resultant sunt doi vectori coliniari; axa centrală este dată de ecuațiile:

$$\frac{L - yZ + zY}{X} = \frac{M - zX + xZ}{Y} = \frac{N - xY + yX}{Z}$$

sau sub forma parametrică:

$$\bar{\rho} = \frac{\bar{R} \times \bar{M}_O}{|\bar{R}|^2} + \lambda \bar{R} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \lambda X + (YN - ZM) / R^2 \\ y = \lambda Y + (ZL - XN) / R^2 \\ z = \lambda Z + (XM - YL) / R^2 \end{cases}$$

## 2.1. REDUCEREA SISTEMELOR DE FORȚE COPLANARE

### PROBLEME REZOLVATE

**2.1.1. Asupra cadrului dreptunghiular din figura 2.1.1.a având laturile**

$OA=a$ ,  $OC=2a$ , acționează forțele coplanare:  $F_1=F_2=\sqrt{2}F$  înclinate cu unghiul  $\alpha = \pi/4$  și  $F_3 = 2F$  ca în fig. 2.1.1.a.

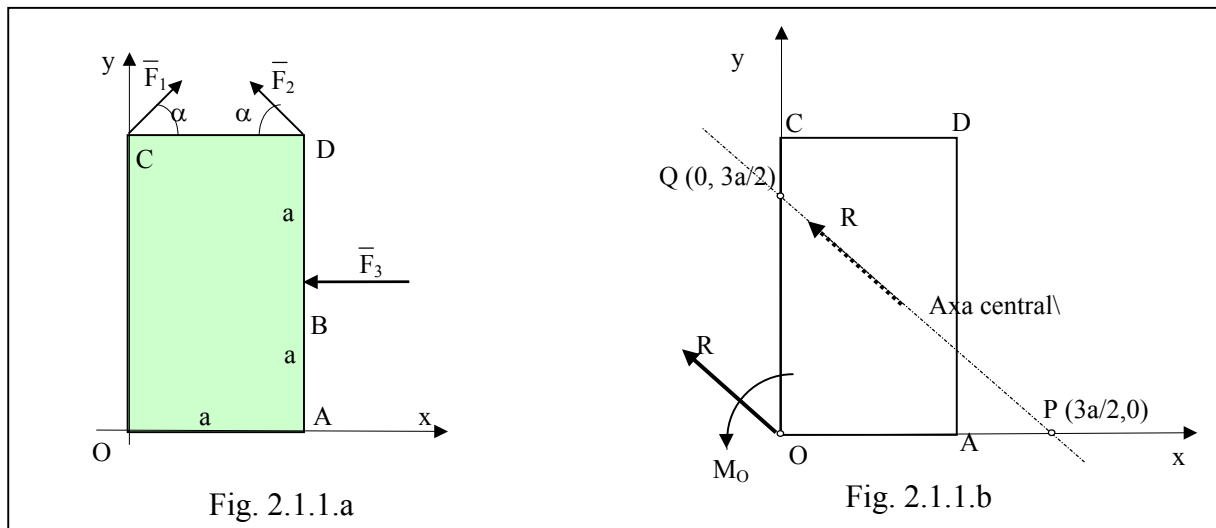
Se cer : 1) Torsorul de reducere în punctul  $O$ .

2) Ecuația suportului rezultantei  $\bar{R}$ , prin tăieturi.

#### Rezolvare :

1) Se scriu expresiile analitice ale vectorilor forțe:

$$\begin{aligned} \bar{F}_1 &= (F_1 \cos \alpha) \bar{i} + (F_1 \sin \alpha) \bar{j} = F(\bar{i} + \bar{j}) \\ \bar{F}_2 &= -(F_2 \cos \alpha) \bar{i} + (F_2 \sin \alpha) \bar{j} = F(-\bar{i} + \bar{j}) \\ \bar{F}_3 &= -F_3 \bar{i} = -2F\bar{i} \end{aligned} \tag{a}$$



Rezultanta sistemului este:  $\bar{R} = \sum_{i=1}^3 \bar{F}_i \Rightarrow \bar{R} = -2F\bar{i} + 2F\bar{j}$  (b)

Momentul rezultat față de  $O$  este: (c)

$$\begin{aligned} \bar{M}_0 &= \sum_{i=1}^3 \bar{M}_0(\bar{F}_i) = \overline{OC} \times \bar{F}_1 + \overline{OD} \times \bar{F}_2 + \overline{OB} \times \bar{F}_3 \\ \bar{M}_0 &= 2a\bar{j} \times F(\bar{i} + \bar{j}) + \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a & 2a & 0 \\ -F & F & 0 \end{vmatrix} + (a\bar{i} + a\bar{j}) \times (-2F\bar{i}) \Rightarrow \bar{M}_0 = 3aF\bar{k} \end{aligned}$$

Torsorul de reducere în punctul  $O$  este deci:

$$\begin{cases} \bar{R} = -2F\bar{i} + 2F\bar{j} & \Rightarrow X = -2F; Y = 2F, Z = 0 \\ \bar{M}_0 = 3aF\bar{k} & \Rightarrow L = M = 0; N = 3aF \end{cases} \tag{d}$$

2) Ecuația axei centrale: 
$$\frac{L - yZ + zY}{X} = \frac{M - zX + xZ}{Y} = \frac{N - xY + yX}{Z}$$

pentru valorile de mai sus se scrie:

$$\frac{2Fz}{-2F} = \frac{2Fz}{2F} = \frac{3aF - 2Fx - 2Fy}{0} \Rightarrow \begin{cases} x + y = \frac{3a}{2} \\ z = 0 \end{cases} \quad (e)$$

Axa centrală este o dreaptă definită prin tăieturile ei:

$$P(3a/2, 0) \text{ și } Q(0, 3a/2) \quad (f)$$

Sistemul de forțe este echivalent cu torsorul  $\tau(\bar{R}, \bar{M}_O)$  de reducere în punctul O, sau sistemul de forțe este echivalent cu o rezultantă unică  $\bar{R}$  situată pe axa centrală (întrucât în acest caz:  $\bar{R} \perp \bar{M}_O = 0$ , sau  $\bar{R} \cdot \bar{M}_O = 0$ ).

**2.1.2.** Se consideră o placă dreptunghiulară având laturile  $OA = 2a$ ,  $OC = 4a$  (fig. 2.1.2.) asupra căreia acționează un cuplu în O și 4 forțe coplanare respectiv în  $A_1, A_2, A_3, A_4$  înclinate cu:  $\alpha_1 = 0$ ;  $\alpha_2 = \pi/4$ ;  $\alpha_3 = -\pi/4$ ;  $\alpha_4 = \pi$  și având modulele date:  $|\bar{M}| = 4aF$   $|\bar{F}_1| = F$ ;  $|\bar{F}_2| = 2\sqrt{2}F$ ;  $|\bar{F}_3| = 3\sqrt{2}F$ ;

$$|\bar{F}_4| = 4F. \text{ Se cere :}$$

- 1) Torsorul de reducere în punctul O.
- 2) Ecuația axei centrale prin tăieturi  $(x_p, y_Q)$
- 3) Cu ce este echivalent sistemul?

**Rezolvare**

1. Expresiile analitice ale forțelor, cuplului

$\bar{M}_1$  și momentelor față de O sunt:

$$\bar{F}_p = X_p \bar{i} + Y_p \bar{j};$$

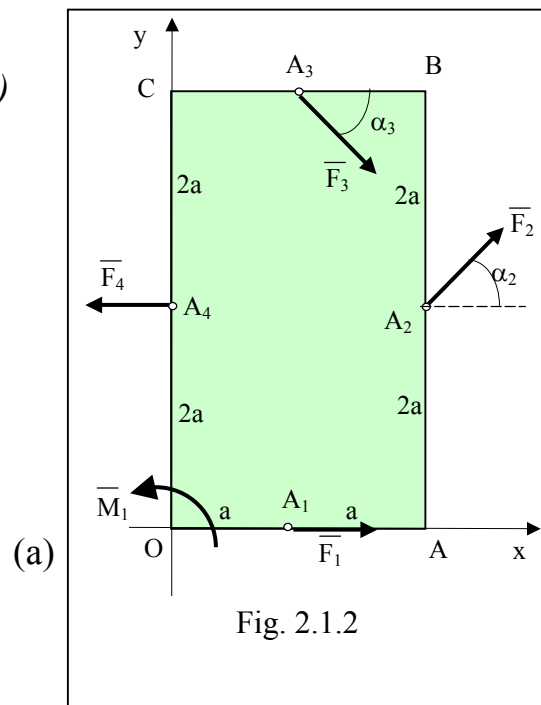
$$\bar{F}_p = (F_p \cos \alpha_p) \bar{i} + (F_p \sin \alpha_p) \bar{j}$$

$$\bar{M}_1 = M_1 \bar{k};$$

$$\bar{M}_O(\bar{F}_p) = (x_p Y_p - y_p X_p) \bar{k}$$

Introducând valorile rezultă:

$$\begin{aligned} \bar{F}_1 &= F\bar{i}; & \bar{F}_2 &= 2F\bar{i} + 2F\bar{j}; & \bar{F}_3 &= 3F\bar{i} - 3F\bar{j}; & \bar{F}_4 &= -4F\bar{i} \\ \bar{M}_O(\bar{F}_1) &= 0; & \bar{M}_O(\bar{F}_2) &= 0; & \bar{M}_O(\bar{F}_3) &= -15aF\bar{k}; & \bar{M}_O(\bar{F}_4) &= 8aF\bar{k}; & \bar{M}_1 &= 4aF\bar{k} \end{aligned} \quad (b)$$



Rezultanta sistemului este prin urmare:

$$\bar{R} = \sum_{p=1}^4 \bar{F}_p \Rightarrow X = \sum_{p=1}^4 F_p \cos \alpha_p = 2F \quad Y = \sum_{p=1}^4 F_p \sin \alpha_p = -F \quad (c)$$

Momentul resultant față de O este:

$$\bar{M}_O = \sum_{p=1}^4 \bar{M}_O(\bar{F}_p) + \bar{M}_1 = -3aFk \quad (d)$$

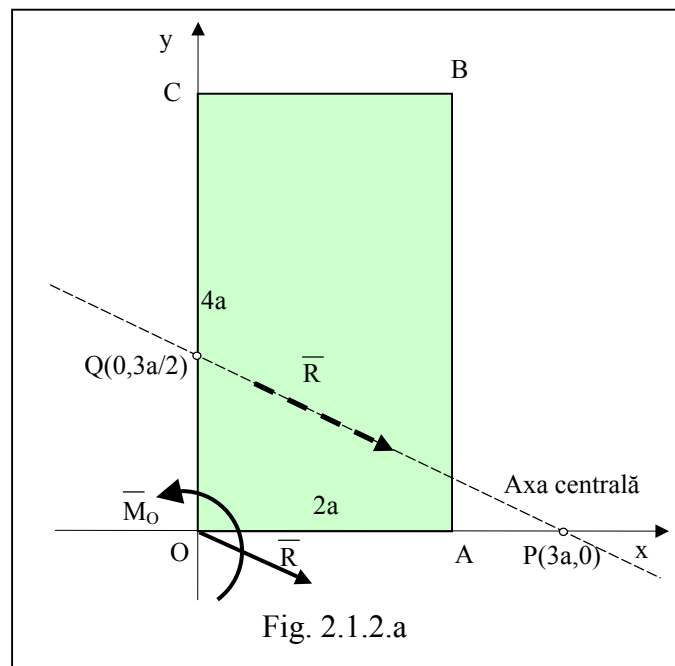
2. Ecuația axei centrale pentru sistemul de forțe dat este:

$$N - xY + yX = 0 : \quad x + 2y = 3a \quad (e)$$

Axa centrală este definită prin tăieturile (fig S2.2.2.a):

$$P(N/Y, 0) \quad x_P = 3a; \quad y_P = 0 \text{ si } Q(0, -N/X) \quad x_Q = 0; \quad y_Q = 3a/2; \quad (f)$$

3. Sistemul de forțe este echivalent cu tursorul de reducere în punctul O:  $\tau(\bar{R}, \bar{M}_O)$  sau cu o rezultantă unică  $\bar{R}$  situată pe axa centrală (întrucât în cazul unui sistem coplanar de forțe:  $\bar{R} \perp \bar{M}_O = 0$ , sau  $\bar{R} \cdot \bar{M}_O = 0$ ).



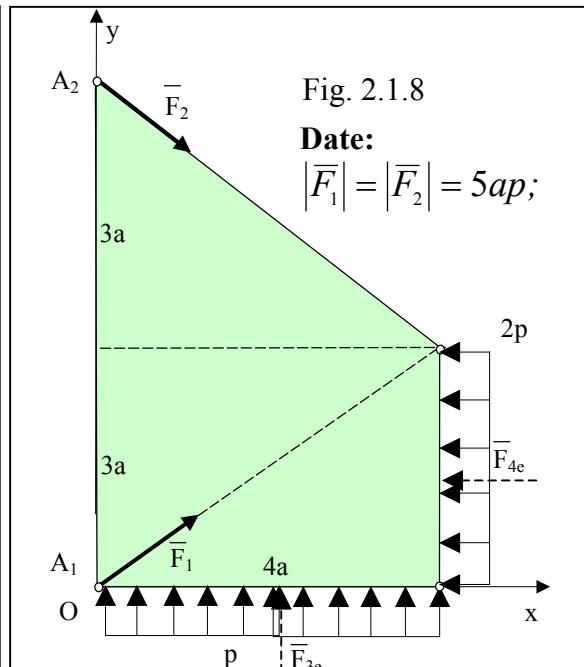
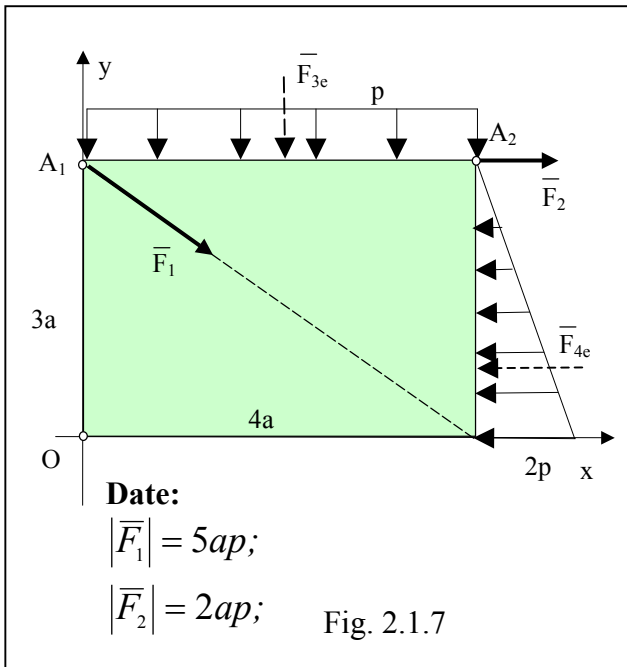
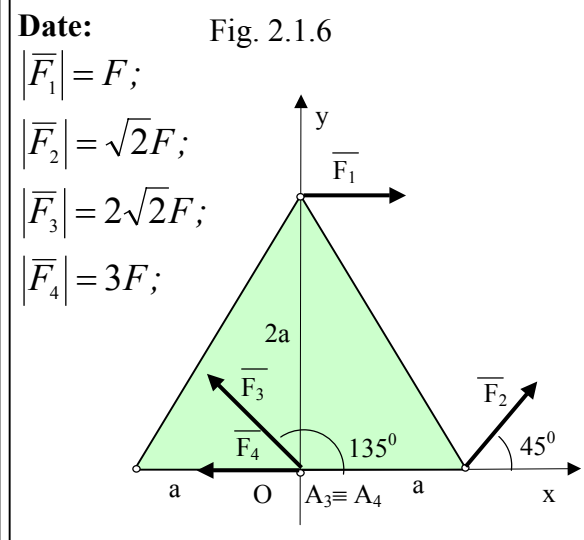
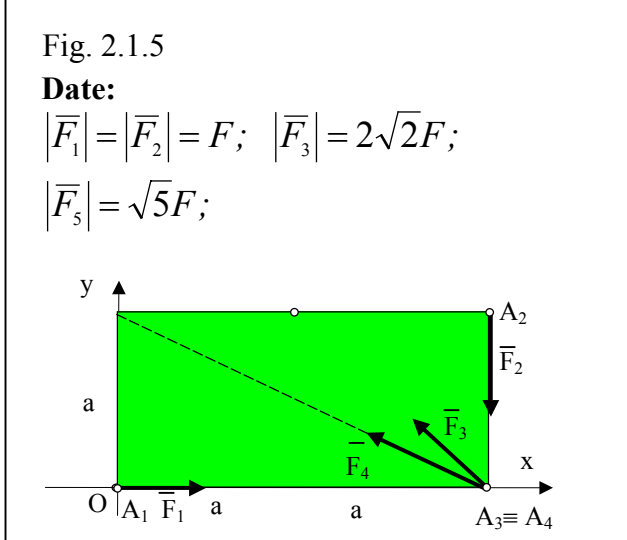
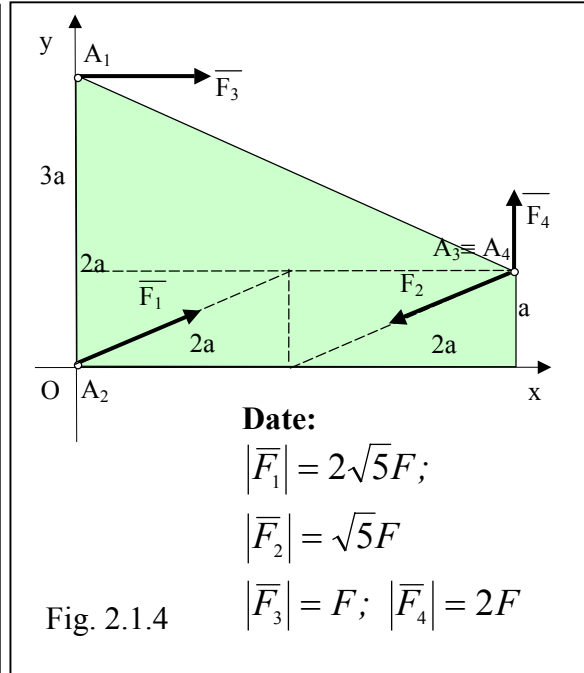
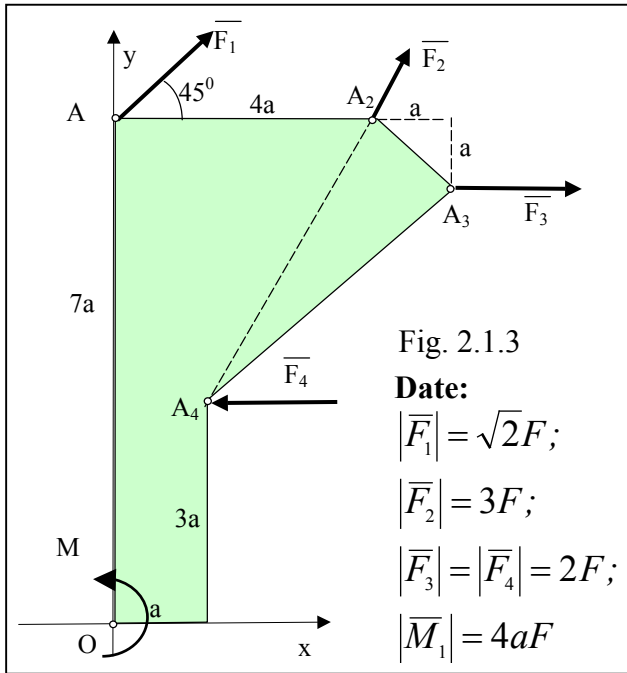
## PROBLEME PROPUSE

Se consideră placa plană având forma și dimensiunile din figură (fig. 2.1.3 ...2.1.6.) asupra căreia acționează un cuplu și 4 forțe coplanare respectiv în  $A_1, A_2, A_3, A_4$  înclinate având modulele și direcțiile date.

**Se cere :**

- 1) Tursorul de reducere în punctul O;
- 3) Ecuația axei centrale și trasarea ei prin tăieturi ;





**REZULTATELE PROBLEMELOR PROPUSE**

Nr. probl.	Torsorul în O $\tau_o$	Ecuția axei centrale	Punctele de inters. Ox și Oy
0	1	3	4
<b>2.1.3</b>	$\tau_o : \begin{cases} \bar{R} = -2,8F\bar{i} + 3,4F\bar{j} \\ \bar{M}_O = -12aF\bar{k} \end{cases}$	$3,4x - 2,8y = -12a$	$P(-3,53a, 0)$ $Q(0, 4, 29a)$
<b>2.1.4</b>	$\tau_o : \begin{cases} \bar{R} = 3F\bar{i} + 3F\bar{j} \\ \bar{M}_O = 2aF\bar{k} \end{cases}$	$3x - 3y = 2a$	$P(2a/3, 0)$ $Q(0, -2a/3)$
<b>2.1.5</b>	$\tau_o : \begin{cases} \bar{R} = -3F\bar{i} + 2F\bar{j} \\ \bar{M}_O = 4aF\bar{k} \end{cases}$	$2x + 3y = 4a$	$P(2a, 0)$ $Q(0, 4a/3)$
<b>2.1.6</b>	$\tau_o : \begin{cases} \bar{R} = -3F\bar{i} + 3F\bar{j} \\ \bar{M}_O = -aF\bar{k} \end{cases}$	$3x + 3y = -a$	$P(a/3, 0)$ $Q(0, a/3)$
<b>2.1.7</b>	$\tau_o : \begin{cases} \bar{R} = 3ap\bar{i} - ap\bar{j} \\ \bar{M}_O = -a^2p\bar{k} \end{cases}$	$x + 3y = 23a$	$P(23a, 0)$ $Q(0, 23a/3)$
<b>2.1.8</b>	$\tau_o : \begin{cases} \bar{R} = 5ap\bar{i} + 4ap\bar{j} \\ \bar{M}_O = -11,5a^2p\bar{k} \end{cases}$	$4x - 5y = -11,5a$	$P(-2,875a, 0)$ $Q(0, 2,3a)$

**ALGORITMUL DE CALCUL UTILIZAT PENTRU PROGRAMUL EXCEL ȘI REZULTATELE OBTINUTE**

Algoritmul de calcul în EXCEL pentru datele concrete ale problemei 2.1.2.

**DATE DE INTRARE**

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
Nr.	$x_1/a$	$y_1/a$	$F_1/F$	$\cos\alpha_1$	$\sin\alpha_1$	$x_2/a$	$y_2/a$	$F_2/F$	$\cos\alpha_2$	$\sin\alpha_2$	$x_3/a$	$y_3/a$	$F_3/F$
1	1	0	1	1	0	2	2	2.8284	0.7071	0.7071	1	4	4.2426

**DATE DE IEȘIRE**

N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W
$\cos\alpha_3$	$\sin\alpha_3$	$x_4/a$	$y_4/a$	$F_4/F$	$\cos\alpha_4$	$\sin\alpha_4$	$M_4/aF$	$X/F = \Sigma F_i \cos\alpha_i / F$	$Y/F = \Sigma F_i \sin\alpha_i / F$
								$C*D+H*I+M*N+R*S$	$C*E+H*J+M*O+R*T$
0.7071	-0.7071	0	2	4	-1	0	4	2	-1

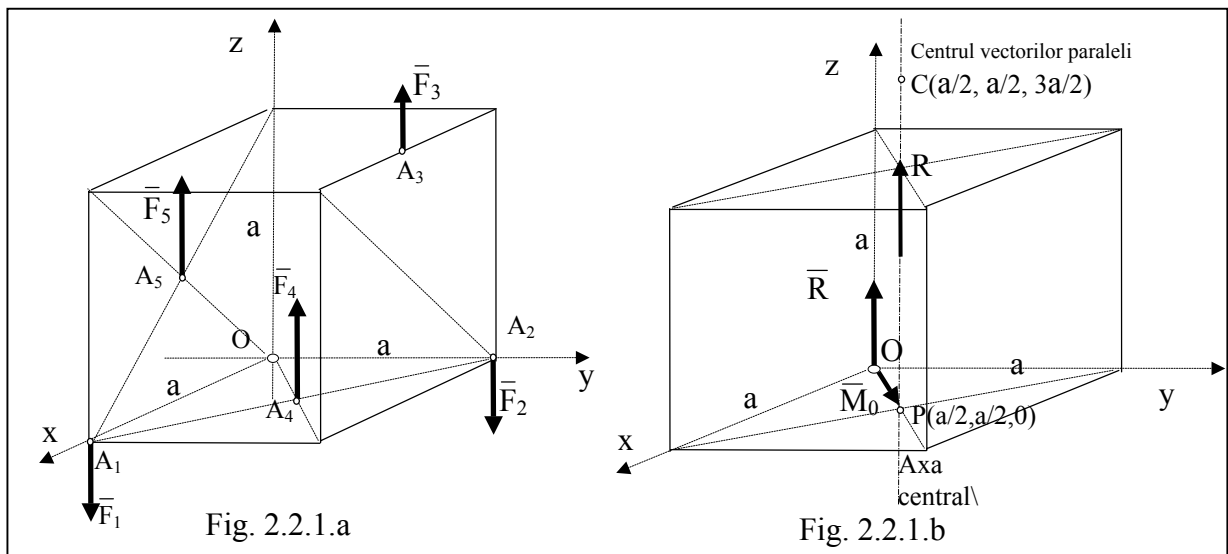
X	Y	Z	AA	AB	AC	AD	AE
$\Sigma x_i F_i \sin\alpha_i / aF$	$\Sigma y_i F_i \cos\alpha_i / aF$	$M_{oz}/aF = M_1 + (\Sigma x_i F_i \sin\alpha_i - \Sigma y_i F_i \cos\alpha_i) / aF$	$x_p/a$	$y_q/a$	$x_j/a$	$y_j/a$	$M_{Jz}/aF = (-x_j*Y+y_j*X)/aF + M_{oz}/aF$
$A*C*E+F*H*J+K*M*O+P*R*T$	$B*C*D+G*H*I+L*M*N+Q*R*S$	$X - Y + U$	$Z / W$	$-Z / V$			$-AC*W+AD*V+Z$

1	8	-3	3	1.5	0	5	7
---	---	----	---	-----	---	---	---

## 2.2. REDUCEREA SISTEMELOR DE FORȚE PARALELE PROBLEME REZOLVATE

**2.2.1** *Se consideră un cub de latură  $a$  asupra căruia se aplică un sistem de cinci forțe paralele verticale  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_4, \vec{F}_5$  respectiv în punctele:  $A_1(a, 0, 0)$ ;  $A_2(0, a, 0)$ ;  $A_3(a/2, a, a)$ ;  $A_4(a/2, a/2, 0)$ ;  $A_5(a/2, 0, a/2)$  (vezi fig. 2.2.1.a). Forțele au același modul:  $|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2| = |\vec{F}_3| = |\vec{F}_4| = |\vec{F}_5| = 2F$ . **Se cere:***

- 1) Torsorulul de reducere în  $O$ ;
- 2) Ecuația axei centrale;
- 3) Poziția centrului forțelor paralele.



### Rezolvare:

- 1) Expresiile analitice ale vectorilor și ale rezultantei acestora, sunt:

$$\vec{F}_1 = \vec{F}_2 = -2F\vec{k}, \vec{F}_3 = \vec{F}_4 = \vec{F}_5 = 2F\vec{k} \tag{a}$$

$$\Rightarrow \vec{R} = 2F\vec{k} \Rightarrow X = Y = 0; Z = 2F$$

Expresia analitică a momentului resultant este:

$$\vec{M}_0 = \sum_{i=1}^5 \vec{M}_0(\vec{F}_i) = \vec{OA}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{OA}_2 \times \vec{F}_2 + \vec{OA}_3 \times \vec{F}_3 + \vec{OA}_4 \times \vec{F}_4 + \vec{OA}_5 \times \vec{F}_5$$

$$\Rightarrow \vec{M}_0 = aF\vec{i} - aF\vec{j} \Rightarrow L = aF; M = aF; N = 0. \tag{b}$$

- 2) Ecuația generală axei centrale se scrie:

$$\frac{2Fa - 4Fy}{0} = \frac{-2Fa + 4Fx}{0} = \frac{0}{2F} \Rightarrow \begin{cases} x = y = \frac{a}{2} \\ z \in R \end{cases} \tag{c}$$

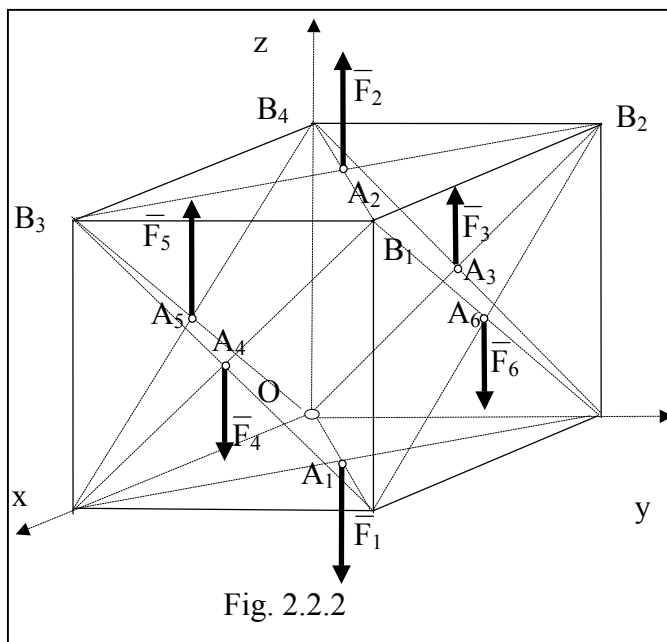
Întrucât pentru toate sistemele de forțe paralele avem îndeplinită condiția:

$\vec{R} \perp \vec{M}_0 = 0$ , sau  $\vec{R} \cdot \vec{M}_0 = 0$  sistemul se reduce la o rezultantă  $\vec{R}$  situată pe axa centrală care este paralelă cu forțele (cu axa  $Oz$ ). ( fig. 2.3.1.b).

Centrul vectorilor forță paraleli  $C(\xi, \eta, \zeta)$  se determină cu ajutorul relațiilor:

$$\xi = \frac{\sum_{i=1}^5 F_i x_i}{\sum_i F_i}, \quad \eta = \frac{\sum_{i=1}^5 F_i y_i}{\sum_i F_i}, \quad \zeta = \frac{\sum_{i=1}^5 F_i z_i}{\sum_i F_i} \quad (d)$$

Înlocuind valorile corespunzătoare, centrul vectorilor paraleli  $C$  are coordonatele :  $\xi = \frac{a}{2}, \eta = \frac{a}{2}, \zeta = \frac{3a}{2} \Rightarrow C\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, \frac{3a}{2}\right)$  (e)



2.2.2. Se consideră un cub de latură  $2a$  asupra căruia se aplică un sistem de 6 forțe în centrele fețelor cubului de latură  $2a$  având direcția lui  $OB_i$ ,  $i=1,2,3,4$  (fig. 2.2.2) de module:

$$|\vec{F}_1| = F; \quad |\vec{F}_2| = 2F; \quad |\vec{F}_3| = 3F; \\ |\vec{F}_4| = 4F; \quad |\vec{F}_5| = 5F; \quad |\vec{F}_6| = 6F$$

Se cere :

- 1) Torsorul de reducere în  $O$ ;
- 2) Ecuația axei centrale;
- 3) Centrul forțelor paralele

**Rezolvare:**

- 1) Expresiile analitice ale vectorilor paraleli și ale rezultantei acestora, sunt:  $\vec{F}_i = F_i \cos \alpha_i \cdot \text{vers } \vec{OB}_i \Rightarrow \vec{R} = (\sum F_i \cos \alpha_i) \cdot \text{vers } \vec{OB}_i$  (a)

unde versorul direcției  $\vec{OB}_i$  se scrie:  $\text{vers } \vec{OB}_i = \frac{\vec{OB}_i}{|\vec{OB}_i|} = \frac{x_{Bi} \vec{i} + y_{Bi} \vec{j} + z_{Bi} \vec{k}}{\sqrt{(x_{Bi})^2 + (y_{Bi})^2 + (z_{Bi})^2}}$

Expresia analitică a momentului rezultant este:

$$\vec{M}_O = \sum_{i=1}^5 \vec{M}_O(\vec{F}_i) = \sum F_i (\vec{OA}_i \times \text{vers } \vec{OB}_i)$$

- 2) Ecuația axei centrale:  $\frac{L - yZ + zY}{X} = \frac{M - zX + xZ}{Y} = \frac{N - xY + yX}{Z}$

- 3) Centrul vectorilor forță paralele  $C(\xi, \eta, \zeta)$  se determină cu ajutorul relațiilor:

$$\xi = \frac{\sum_{i=1}^5 F_i x_i}{\sum_i F_i}, \quad \eta = \frac{\sum_{i=1}^5 F_i y_i}{\sum_i F_i}, \quad \zeta = \frac{\sum_{i=1}^5 F_i z_i}{\sum_i F_i} \quad (b)$$

## ALGORITMUL DE CALCUL UTILIZAT PENTRU PROGRAMUL EXCEL ȘI REZULTATELE OBTINUTE

### DATE DE INTRARE

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
Nr.	$x_1/a$	$y_1/a$	$z_1/a$	$F_1/F$	$\cos\alpha_1$	$x_2/a$	$y_2/a$	$z_2/a$	$F_2/F$	$\cos\alpha_2$
1	1	1	0	1	-1	1	1	2	2	1

K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U
$x_3/a$	$y_3/a$	$z_3/a$	$F_3/F$	$\cos\alpha_3$	$x_4/a$	$y_4/a$	$z_4/a$	$F_4/F$	$\cos\alpha_4$	$x_5/a$
0	1	1	3	1	2	1	1	4	-1	1

V	W	X	Y	Z	AA	AB	AC	AD	AE	AF	AG
$y_5/a$	$z_5/a$	$F_5/F$	$\cos\alpha_5$	$x_6/a$	$y_6/a$	$z_6/a$	$F_6/F$	$\cos\alpha_6$	$x_B/a$	$y_B/a$	$z_B/a$
0	1	5	1	1	2	1	6	-1	2	2	2

### DATE DE IEȘIRE

AH	AI	AJ	AK	AL
$\Sigma F_i x_i \cos\alpha_i / aF$	$\Sigma F_i y_i \cos\alpha_i / aF$	$\Sigma F_i z_i \cos\alpha_i / aF$	$\Delta_x = \text{versOB}_x$	$\Delta_y = \text{versOB}_y$
$A*D*E+F*I*J+K*N*O+P*S$ $*T+U*X*Y+Z*AC*AD$	$B*D*E+G*I*J+L*N*O+Q*$ $S*T+V*X*Y+AA*AC*AD$	$C*D*E+H*I*J+M*N*O+R*$ $S*T+W*X*Y+AB*AC*AD$	$AE/\text{SQRT}(AE^2+$ $AF^2+AG^2)$	$AF/\text{SQRT}(AE^2+$ $AF^2+AG^2)$
-8	-12	2		0,57735

AM	AN	AO	AP	AQ	AR
$\Delta_z = \text{versOB}_z$	$R/F =$ $\Sigma F_i \cos\alpha_i / F$	$X/F =$ $\Delta_x \cdot R / F$	$Y/F =$ $\Delta_y \cdot R / F$	$Z/F =$ $\Delta_z \cdot R / F$	$M_{Ox}/aF = \Delta_z \Sigma F_i y_i \cos\alpha_i / aF$ $-\Delta_y \Sigma F_i z_i \cos\alpha_i / aF$
$AG/\text{SQRT}(AE^2+AF^2+AG^2)$	$D*E+I*J+N*O+S*$ $T+X*Y+AC*AD$	$AN*AK$	$AN*AL$	$AN*AM$	$AM*AI - AL*AJ$
0,57735	-1	-0,57735	-0,57735	-0,57735	-8,0829

AT	AU	AV	AW	AX	AY
$M_{Oy}/aF = \Delta_x \Sigma F_i z_i$ $\cos\alpha_i / aF -$ $-\Delta_z \Sigma F_i x_i \cos\alpha_i / aF$	$M_{Oz}/aF = \Delta_y \Sigma F_i x_i$ $\cos\alpha_i / aF -$ $-\Delta_x \Sigma F_i y_i \cos\alpha_i / aF$	$R \cdot M_O / a^2 F = (X \cdot M_{Ox} +$ $Y \cdot M_{Oy}$ $+ Z \cdot M_{Oz}) / a^2 F = 0$ <b>(verificare)</b>	$\xi/a$	$\eta/a$	$\zeta/a$
$AK*AJ - AM*AH$	$AL*AH - AK*AI$	$AO*AR+AP*AT+AQ*AU$	$AH/AN$	$AI/AN$	$AJ/AN$
5,7735	2,3094	0	8	12	-2

S-au obținut deci următoarele rezultate pentru problema 2.2.2:

1) Torsorul de reducere în O:

$$\tau_0 : \begin{cases} \bar{R} = -0,577F\bar{i} - 0,577F\bar{j} \\ \bar{M}_0 = -8,083aF\bar{i} + 5,773aF\bar{j} + 2,309aF\bar{k} \end{cases} \quad (c)$$

2) Ecuația axei centrale:

$$\begin{aligned} \frac{-8,083aF - 0,577Fy + 0,577Fz}{0,577F} &= \frac{5,773aF - 0,577Fz + 0,577Fx}{0,577F} = \\ &= \frac{2,309aF - 0,577Fx + 0,577Fy}{0,577F} \end{aligned} \quad (d)$$

Întrucât pentru toate sistemele de forțe paralele avem:

$\bar{R} \perp \bar{M}_0 = 0$ , sau  $\bar{R} \cdot \bar{M}_0 = 0$  sistemul se reduce la o rezultantă  $\bar{R}$  situată pe axa centrală care este paralelă cu forțele (cu axa Oz).

3) Centrul forțelor paralele are coordonatele:

$$\xi = 8a, \quad \eta = 12a, \quad \zeta = -2a \Rightarrow C(8a, 12a, -2a) \quad (e)$$

### PROBLEMĂ PROPUȘĂ

**2.2.3 Se consideră sistem de forțe paralele verticale  $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \bar{F}_3, \bar{F}_4$  care se aplică respectiv în punctele:  $A_1(3a, a, 0); A_2(a, 2a, 0); A_3(2a, -a, 0); A_4(-2a, 5a, 0)$ ; (fig. 2.2.1.a). Forțele au modulele:  $|\bar{F}_1| = 5F; |\bar{F}_2| = 3F; |\bar{F}_3| = 9F; |\bar{F}_4| = F$ . **Se cer:****

1) Torsorul de reducere în O;

2) Ecuația axei centrale și poziția centrului forțelor paralele.

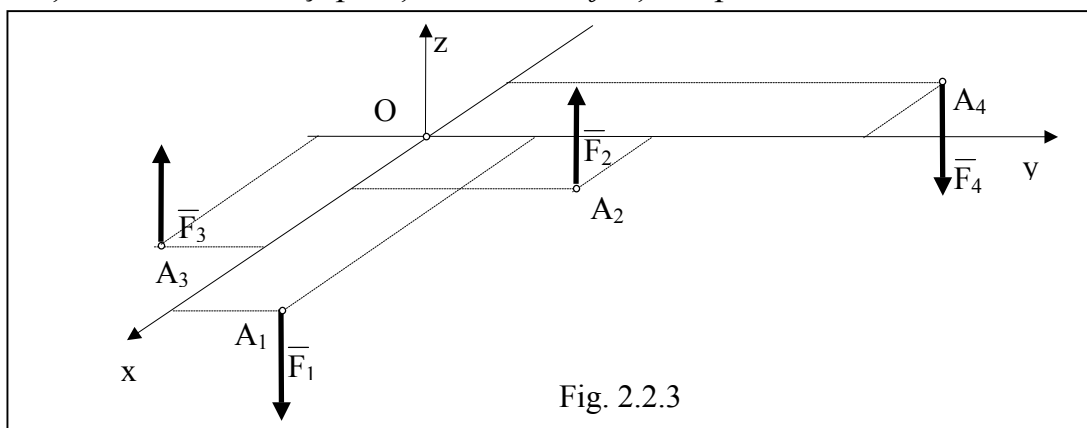


Fig. 2.2.3

**Rezultate:**

1) Torsorul de reducere în O:  $\tau_0 : \begin{cases} \bar{R} = 6F\bar{k} \\ \bar{M}_0 = -13aF\bar{i} + 8aF\bar{j} \end{cases}$

2) Ecuația axei centrale și centrul vectorilor paraleli:  $x = \frac{4}{3}a; y = -\frac{13}{6}a; C\left(\frac{4}{3}a; -\frac{13}{6}a; 0\right)$

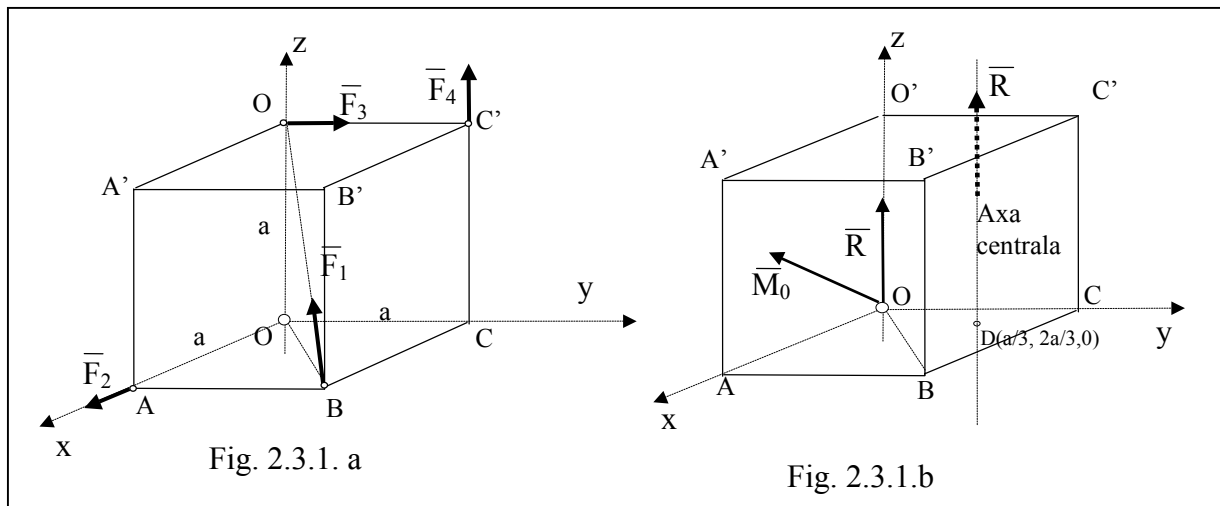
## 2.3. REDUCEREA SISTEMELOR SPAȚIALE DE FORȚE ȘI CUPLURI.

### PROBLEME REZOLVATE

**2.3.1** *Se consideră un cub rigid de latură  $a$ , asupra căruia acționează forțele:  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_4$  ca în figura 2.3.1.a. Mărimile acestor forțe sunt cunoscute:*

$$|\vec{F}_1| = \sqrt{3}F, |\vec{F}_2| = |\vec{F}_3| = F, |\vec{F}_4| = 2F. \quad \text{Se cer:}$$

- 1) Torsorul de reducere în punctul  $O$ ;
- 2) Torsorul de reducere în punctul  $B'$ ;
- 3) Ecuația axei centrale;
- 4) Cu ce este echivalent sistemul?



**Rezolvare:**

1) Expresiile analitice ale vectorilor forță se scriu astfel:

$$\begin{aligned} \vec{F}_1 &= |\vec{F}_1| \text{vers} \vec{F}_1 = |\vec{F}_1| \frac{\overline{BO'}}{|\overline{BO'}|} = \sqrt{3}F \frac{-a\vec{i} - a\vec{j} + a\vec{k}}{a\sqrt{3}} = F(-\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}) \\ \vec{F}_2 &= |\vec{F}_2| \text{vers} \vec{F}_2 = F\vec{i}; \quad \vec{F}_3 = |\vec{F}_3| \text{vers} \vec{F}_3 = F\vec{j}; \quad \vec{F}_4 = |\vec{F}_4| \text{vers} \vec{F}_4 = 2F\vec{k} \\ \Rightarrow \vec{R} &= \sum_{i=1}^4 \vec{F}_i = 3F\vec{k} \quad \Rightarrow X = Y = 0, \quad Z = 3F \end{aligned} \tag{a}$$

și expresiile analitice ale vectorilor moment:

$$\begin{aligned} \vec{M}_0 &= \sum_{i=1}^4 \vec{M}_0(\vec{F}_i) = \overline{OB} \times \vec{F}_1 + \overline{OA} \times \vec{F}_2 + \overline{OO'} \times \vec{F}_3 + \overline{OC'} \times \vec{F}_4 = \\ &= (a\vec{i} + a\vec{j}) \times F\vec{i} + a\vec{k} \times F\vec{j} + (a\vec{j} + a\vec{k}) \times 2F\vec{k} \\ \vec{M}_0 &= Fa(2\vec{i} - \vec{j}) \quad \Rightarrow L = 2aF, \quad M = -aF, \quad N = 0 \end{aligned} \tag{b}$$

2) Momentul rezultat în punctul  $B'$  se calculează cu ajutorul relației:

$$\overline{M}_B = \overline{M}_O + \overline{B'O} \times \overline{R} = 2aF\vec{i} - aF\vec{j} + (-a\vec{i} - a\vec{j} - a\vec{k}) \times 3F\vec{k} = aF(-\vec{i} + 2\vec{j}) \quad (c)$$

Ecuția axei centrale se scrie:

$$\frac{L - yZ + zY}{X} = \frac{M - zX + xZ}{Y} = \frac{N - xY + yX}{Z}$$

$$\Rightarrow \frac{2aF - 3Fy}{0} = \frac{-aF + 3Fx}{0} = \frac{0}{3F} \Rightarrow x = \frac{a}{3}, y = \frac{2a}{3}, z \in R \quad (d)$$

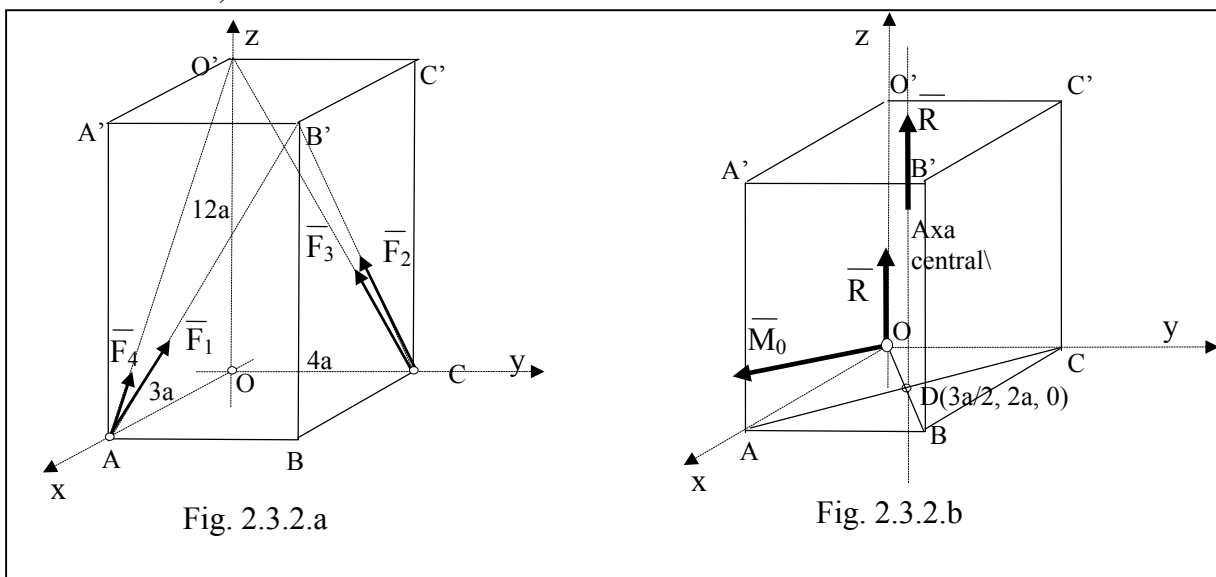
și este o dreaptă perpendiculară pe planul Oxy (paralelă cu axa Oz) care intersectează Oxy în punctul  $D(a/3, 2a/3, 0)$ .

4) Întrucât  $\overline{M}_O \cdot \overline{R} = 0 \Rightarrow \overline{M}_O \perp \overline{R}$  sau  $M_R = 0$ , sistemul se reduce la un vector unic  $\overline{R}$  situat pe axa centrală. Prin urmare sistemul de forțe  $(\overline{F}_1, \overline{F}_2, \overline{F}_3, \overline{F}_4)$  aplicate în  $A_1, A_2, A_3, A_4$  este echivalent cu:

- a. un torsor  $(\overline{R}, \overline{M}_O)$  aplicat în O;
- b. o rezultantă unică  $\overline{R}$  aplicat într-un punct oarecare de pe axa centrală.

**2.3.2.** Se consideră paralelipipedul dreptunghic rigid cu laturile:  $OA=3a$ ,  $OC=4a$ ,  $OO'=12a$  asupra căruia acționează forțele  $\overline{F}_1, \overline{F}_2, \overline{F}_3, \overline{F}_4$  după direcțiile diagonalelor  $AB'$ ,  $CB'$ ,  $CO'$  respectiv  $AO'$  (fig.2.3.2.a). Forțele au mărimile:  $|\overline{F}_1| = |\overline{F}_3| = 4F\sqrt{12}$ ,  $|\overline{F}_2| = |\overline{F}_4| = 3F\sqrt{17}$

- Se cere:
- 1) Torsorul de reducere în O;
  - 2) Ecuția axei centrale;
  - 3) La ce se reduce sistemul?



**Rezolvare:**



1) Expresiile analitice ale celor patru forțe sunt:

$$\vec{F}_1 = |\vec{F}_1| \text{vers} \vec{F}_1 = |\vec{F}_1| \frac{\overline{AB'}}{|\overline{AB'}|} = 4F\sqrt{10} \frac{4a\vec{j} + 12a\vec{k}}{4a\sqrt{10}} = 4F(\vec{i} + 3\vec{k}) \quad (a)$$

$$\vec{F}_2 = |\vec{F}_2| \text{vers} \vec{F}_2 = |\vec{F}_2| \frac{\overline{CB'}}{|\overline{CB'}|} = 3F\sqrt{17} \frac{3a\vec{i} + 12a\vec{k}}{3a\sqrt{17}} = 3F(\vec{i} + 4\vec{k})$$

$$\vec{F}_3 = |\vec{F}_3| \text{vers} \vec{F}_3 = |\vec{F}_3| \frac{\overline{CO'}}{|\overline{CO'}|} = 4F\sqrt{10} \frac{-4a\vec{j} + 12a\vec{k}}{4a\sqrt{10}} = 4F(-\vec{j} + 3\vec{k}) \quad (a)$$

$$\vec{F}_4 = |\vec{F}_4| \text{vers} \vec{F}_4 = |\vec{F}_4| \frac{\overline{AO'}}{|\overline{AO'}|} = 3F\sqrt{17} \frac{-3a\vec{i} + 12a\vec{k}}{3a\sqrt{17}} = 3F(-\vec{i} + 4\vec{k})$$

Expresiile rezultantei și al momentului resultant în punctul O vor fi:

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^4 \vec{F}_i = 48F\vec{k} \quad \Rightarrow \quad X = Y = 0, \quad Z = 48F \quad (b)$$

$$\vec{M}_0 = \sum_{i=1}^4 M_0(\vec{F}_i) = \overline{OA} \times \vec{F}_1 + \overline{OC} \times \vec{F}_2 + \overline{OC} \times \vec{F}_3 + \overline{OA} \times \vec{F}_4$$

$$\vec{M}_0 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3a & 0 & 0 \\ 4F & 0 & 12F \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 4a & 0 \\ 3F & 0 & 4F \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 4a & 0 \\ 0 & -4F & 12F \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3a & 0 & 0 \\ -3F & 0 & 12F \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{M}_0 = 96aF\vec{i} - 72aF\vec{j}$$

$$\Rightarrow L = 96aF, \quad M = 72aF, \quad N = 0 \quad (c)$$

2) Ecuația axei centrale se scrie:

$$\frac{96aF - 48Fy}{0} = \frac{-72aF + 48Fx}{0} = \frac{0}{48F} \quad (d)$$

$$\Rightarrow x = \frac{3a}{2}, y = 2a, z = \text{arbitrar} \quad , \text{ deci axa centrală este paralelă cu Oz}$$

fiind chiar axa de simetrie a paralelipipedului, (vezi fig. 2.3.2.b).

Ecuația axei centrale sub formă vectorială se scrie:  $\vec{\rho} = \frac{\vec{R} \times \vec{M}_0}{|\vec{R}|^2} + \lambda \vec{R}$ ; sau

$$x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = \frac{1}{17F^2} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2F & 3F & 2F \\ 2aF & -14aF & 13aF \end{vmatrix} + \lambda F(-2\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k})$$

Deci ecuațiile parametrice ale axei centrale se scriu:

$$x = \frac{67}{17}a - 2F\lambda; \quad y = \frac{30}{17}a + 3F\lambda; \quad z = \frac{22}{17}a + 2F\lambda \quad (e)$$

3) Întrucât  $\overline{M}_O \cdot \overline{R} = 0 \Rightarrow \overline{M}_O \perp \overline{R}$ , sistemul se reduce la o rezultantă unică  $\overline{R}$  situată pe axa centrală, (vezi fig. 2.1.2.b).

**2.3.3. Se consideră sistemele formate din trei forțe  $\overline{F}_1, \overline{F}_2, \overline{F}_3$  și trei cupluri  $\overline{M}_x, \overline{M}_y, \overline{M}_z$  ce acționează asupra unui paralelipiped având forma și dimensiunile precizate în fig. 2.3.3; orientarea forțelor  $\overline{F}_1, \overline{F}_2, \overline{F}_3$  este dată de vectorii  $\overline{AB}, \overline{CD}, \overline{EF}$ , iar orientarea celor trei cupluri este după cele trei axe de coordonate ( $Ox, Oy, Oz$ ). Se dau modulele acestor forțe și cupluri:**

$$|\overline{F}_1| = \sqrt{22}F; \quad |\overline{F}_2| = 5F; \quad |\overline{F}_3| = 2F; \quad |\overline{M}_x| = |\overline{M}_y| = 0; \quad |\overline{M}_z| = 2aF;$$

**Să se determine:**

1. Torsorul de reducere al sistemului, în punctul  $O$ ;
2. Torsorul minimal;
3. Ecuația axei centrale;

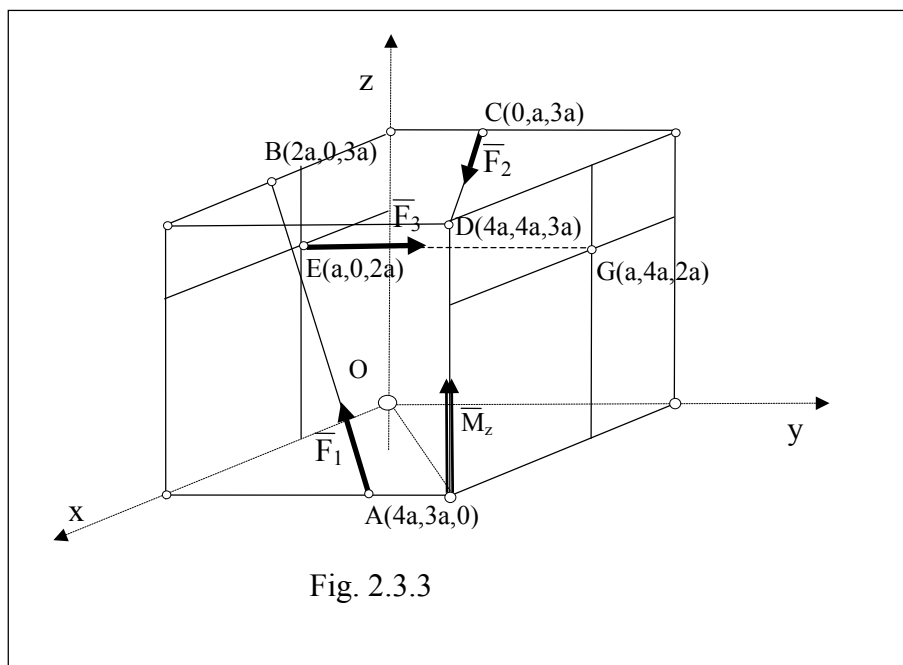


Fig. 2.3.3

Pentru creerea algoritmului de calcul în EXCEL pentru problema 2.3.3. s-au utilizat următoarele relații:

➤ Expresiile analitice ale celor patru vectori:

$$\bar{F}_1 = |\bar{F}_1| \cdot \text{vers } \overline{AB} = |\bar{F}_1| \cdot \frac{\overline{AB}}{|\overline{AB}|} = |\bar{F}_1| \cdot \frac{(x_B - x_A)\bar{i} + (y_B - y_A)\bar{j} + (z_B - z_A)\bar{k}}{\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}}; \quad (\text{a})$$

$$\bar{F}_2 = |\bar{F}_2| \cdot \text{vers } \overline{CD}; \quad \bar{F}_3 = |\bar{F}_3| \cdot \text{vers } \overline{EF}; \quad \bar{M}_1 = |\bar{M}_1| \cdot \text{vers } \overline{M}_1$$

➤ Expresiile analitice ale momentelor celor 3 forțe în raport cu O:

$$\begin{aligned} \bar{M}_o(\bar{F}_1) &= \overline{OA} \times \bar{F}_1 = (y_A Z_1 - z_A Y_1)\bar{i} + (z_A X_1 - x_A Z_1)\bar{j} + (x_A Y_1 - y_A X_1)\bar{k} \\ \bar{M}_o(\bar{F}_2) &= \overline{OC} \times \bar{F}_2 = (y_C Z_2 - z_C Y_2)\bar{i} + (z_C X_2 - x_C Z_2)\bar{j} + (x_C Y_2 - y_C X_2)\bar{k} \\ \bar{M}_o(\bar{F}_3) &= \overline{OE} \times \bar{F}_3 = (y_E Z_3 - z_E Y_3)\bar{i} + (z_E X_3 - x_E Z_3)\bar{j} + (x_E Y_3 - y_E X_3)\bar{k} \end{aligned} \quad (\text{b})$$

➤ Componentele torsorului de reducere al sistemului în punctul O:

$$\bar{R} = X\bar{i} + Y\bar{j} + Z\bar{k}; \quad \bar{M}_o = L\bar{i} + M\bar{j} + N\bar{k} \quad (\text{c})$$

➤ Componentele torsorului minimal:

$$\bar{M}_{min} = \frac{\bar{R} \cdot \bar{M}_o}{R^2} X\bar{i} + \frac{\bar{R} \cdot \bar{M}_o}{R^2} Y\bar{j} + \frac{\bar{R} \cdot \bar{M}_o}{R^2} Z\bar{k} \quad (\text{d})$$

➤ Componentele produsului vectorial :

$$\bar{R} \times \bar{M}_o = (YN - ZN)\bar{i} + (ZL - XN)\bar{j} + (XM - YL)\bar{k} \quad (\text{e})$$

din ecuația vectorială a axei centrale:

$$\bar{\rho} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k} = (\bar{R} \times \bar{M}_o) / R^2 + \lambda \bar{R} \quad (\text{f})$$

Rezultatele calculelor conform relațiilor de mai sus sunt:

1. Torsorul de reducere în punctul O:

$$\tau_o : \begin{cases} \bar{R} = F(2\bar{i} + 2\bar{j} + 3\bar{k}) \\ \bar{M}_o = aF(-4\bar{i} - 6\bar{k}) \end{cases} \quad (\text{g})$$

2. Torsorul minimal:

$$\tau_{min} : \begin{cases} \bar{R} = F(2\bar{i} + 2\bar{j} + 3\bar{k}) \\ \bar{M}_{min} = -3,0588aF\bar{i} - 3,0588aF\bar{j} - 4,5882aF\bar{k} \end{cases} \quad (\text{h})$$

3. Ecuația axei centrale sub formă parametrică:

$$x = -\frac{12}{17}a + 2\lambda F; \quad y = 2\lambda F; \quad z = \frac{8}{17}a + 3\lambda F \quad (\text{i})$$

Relațiile de mai sus se regăsesc în următorul algoritm de calcul:

## ALGORITMUL DE CALCUL UTILIZAT PENTRU PROGRAMUL EXCEL ȘI REZULTATELE OBTINUTE

### DATE DE INTRARE

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
Nr.	x <sub>A</sub> /a	y <sub>A</sub> /a	z <sub>A</sub> /a	x <sub>B</sub> /a	y <sub>B</sub> /a	z <sub>B</sub> /a	x <sub>C</sub> /a	y <sub>C</sub> /a	z <sub>C</sub> /a	x <sub>D</sub> /a	y <sub>D</sub> /a	z <sub>D</sub> /a
1	4	3	0	2	0	3	0	1	3	1	0	2
M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	X	Y	Z

$x_E/a$	$y_E/a$	$z_E/a$	$x_F/a$	$y_F/a$	$z_F/a$	$F_1/F$	$F_2/F$	$F_3/F$	$M_1/aF$	vers $M_{1x}$	vers $M_{1y}$	vers $M_{1z}$
4	4	3	1	4	2	4,6904	5	2	2	0	0	1

**DATE DE IEȘIRE**

AA	AB	AC
$(\text{versF1})_x$	$(\text{versF1})_y$	$(\text{versF1})_z$
$(D1-A1)/\text{SQRT}((D1-A1)^2+(E1-B1)^2+(F1-C1)^2)$	$(E1-B1)/\text{SQRT}((D1-A1)^2+(E1-B1)^2+(F1-C1)^2)$	$(F1-C1)/\text{SQRT}((D1-A1)^2+(E1-B1)^2+(F1-C1)^2)$
-0,4264	-0,6396	0,6396

AE	AF	AG
$(\text{versF2})_x$	$(\text{versF2})_y$	$(\text{versF2})_z$
$(J1-G1)/\text{SQRT}((J1-G1)^2+(K1-H1)^2+(L1-I1)^2)$	$(K1-H1)/\text{SQRT}((J1-G1)^2+(K1-H1)^2+(L1-I1)^2)$	$(L1-I1)/\text{SQRT}((J1-G1)^2+(K1-H1)^2+(L1-I1)^2)$
0,8	0,6	0

AH	AI	AJ
$(\text{versF3})_x$	$(\text{versF3})_y$	$(\text{versF3})_z$
$(P1-M1)/\text{SQRT}((P1-M1)^2+(Q1-N1)^2+(R1-O1)^2)$	$(Q1-N1)/\text{SQRT}((P1-M1)^2+(Q1-N1)^2+(R1-O1)^2)$	$(R1-O1)/\text{SQRT}((P1-M1)^2+(Q1-N1)^2+(R1-O1)^2)$
0	1	0

AK	AL	AM	AN	AO	AP
$X/F$	$Y/F$	$Z/F$	$R^2/F^2$	$(M_0F1/aF)_x$	$(M_0F1/aF)_y$
$AA1*S1+AE1*T1+AH1*U1$	$AB1*S1+AF1*T1+AI1*U1$	$AC1*S1+AG1*T1+AJ1*U1$	$AK^2+AL^2+AM^2$	$S1(B1*AC1-C1*AB1)$	$S1(C1*AA1-A1*AC1)$
2	2	3	17	9	-12

AQ	AR	AS	AT	AU	AV
$(M_0F1/aF)_z$	$(M_0F2/aF)_x$	$(M_0F2/aF)_y$	$(M_0F2/aF)_z$	$(M_0F3/aF)_x$	$(M_0F3/aF)_y$
$S1(A1*AB1-B1*AA1)$	$T1(H1*AG1-I1*AF1)$	$T1(I1*AE1-G1*AG1)$	$T1(G1*AF1-H1*AE1)$	$U1(N1*AJ1-O1*AI1)$	$U1(O1*AH1-M1*AJ1)$
-6	-9	12	-4	-4	0

AW	AX	AY	AZ	BA
$(M_0F3/aF)_z$	$L/aF = (M_0/aF)_x$	$M/aF = (M_0/aF)_y$	$N/aF = (M_0/aF)_z$	$R.M_0/aF^2$
$U1(M1*AI1-N1*AH1)$	$AO1+AR1+AU1+X1*V1$	$AP1+AS1+AV1+Y1*V1$	$AQ1+AT1+AW1+Z1*V1$	$AK1*AX1+AL1*AY1+AM1*AZ1$
2	-4	0	-6	-26

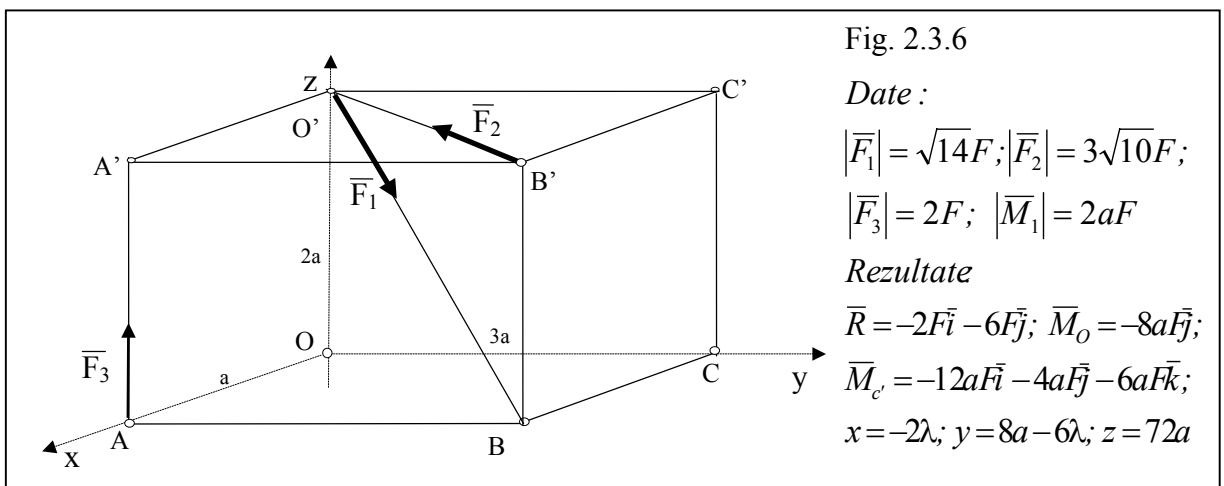
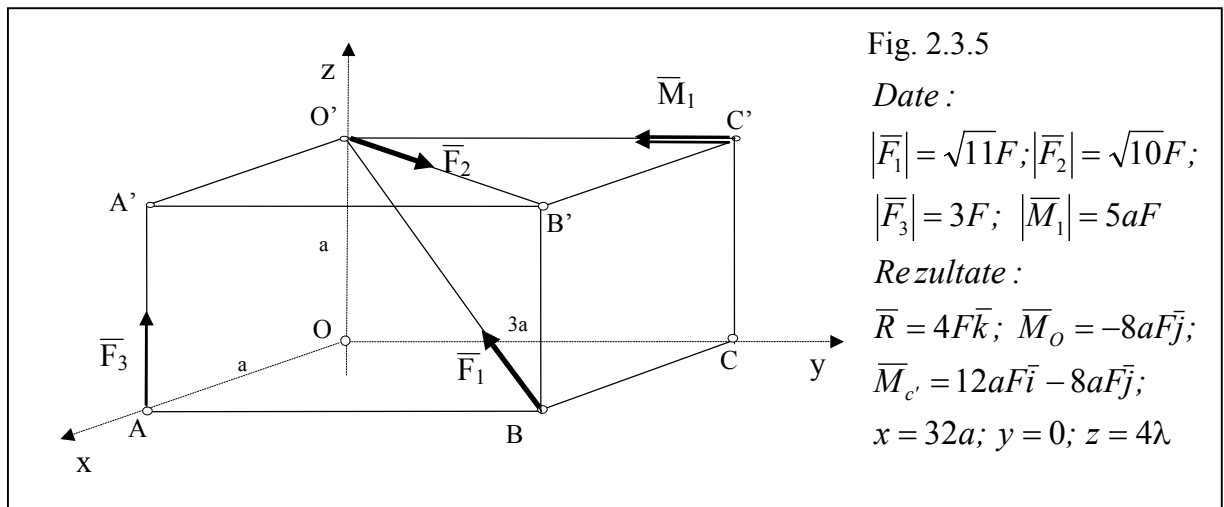
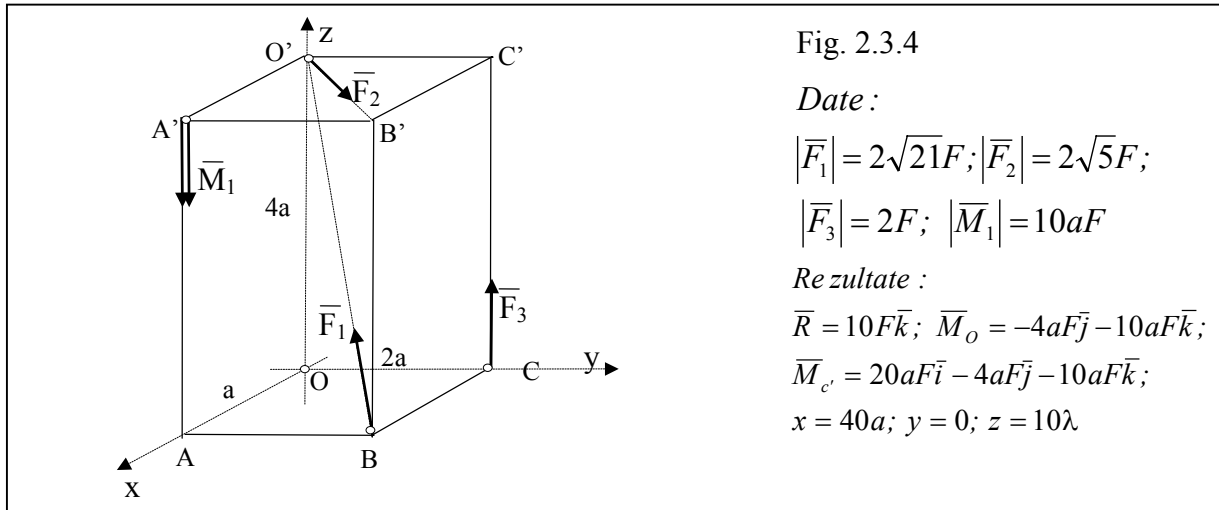
BB	BC	BD	BE	BF	BG
$(M_{min}/aF)_x$	$(M_{min}/aF)_y$	$(M_{min}/aF)_z$	$(\bar{R} \times \bar{M}_0/aF^2)_x$	$(\bar{R} \times \bar{M}_0/aF^2)_y$	$(\bar{R} \times \bar{M}_0/aF^2)_z$
$BA1*AK1/AN1$	$BA1*AL1/AN1$	$BA1*AM1/AN1$	$AL1*AZ1-AM1*AY1$	$AM1*AX1-AK1*AZ1$	$AK1*AY1-AL1*AX1$
-3,0588	-3,0588	-4,5882	-12	0	8

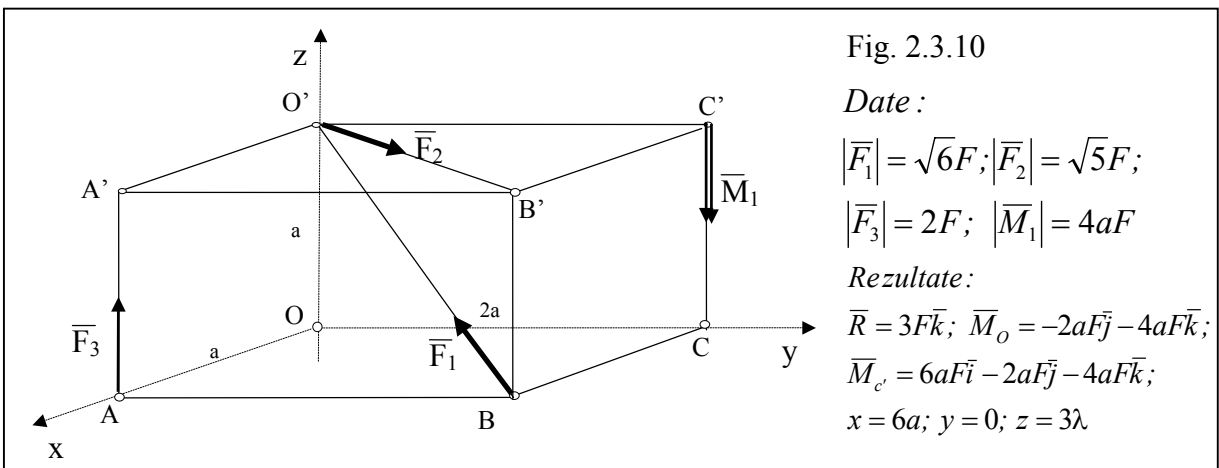
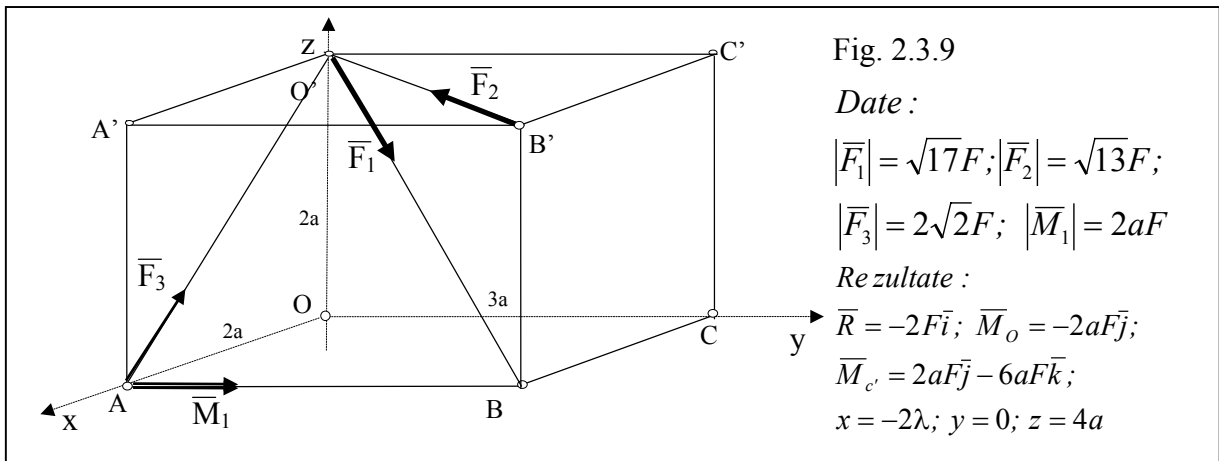
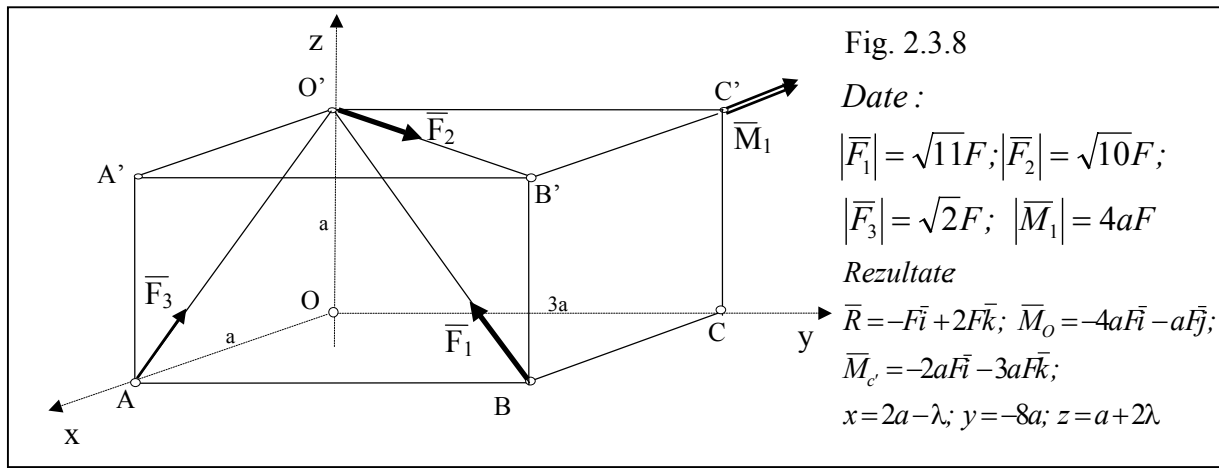
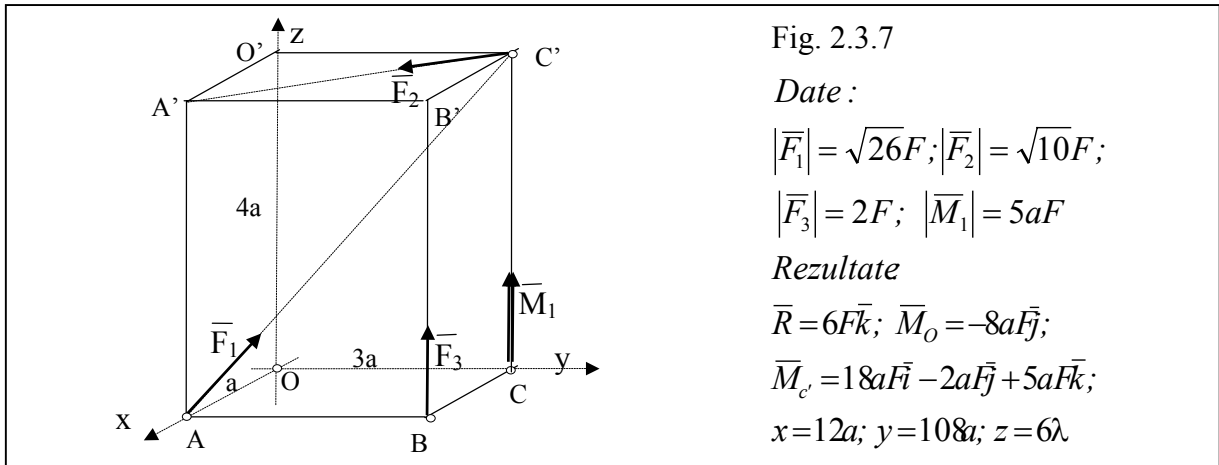
**PROBLEME PROPUSE**

Se consideră un paralelipiped rigid, asupra căruia acționează forțele:  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{M}_1$  ca în figurile 2.3.4...2.3.10. Mărimile acestor forțe sunt cunoscute.

Se cer:

- 1) Torsorul de reducere în punctul O;
- 2) Torsorul de reducere în punctul C';
- 3) Ecuația axei centrale sub formă parametrică;





## CAPITOLUL III

### CENTRUL MASELOR - CENTRE DE GREUTATE

#### REZUMAT DE TEORIE

Centrul de greutate pentru un sistem rigid continuu de puncte materiale are vectorul de poziție  $\bar{\rho}$  și coordonatele  $(\xi, \eta, \zeta)$ , date de relațiile:

$$\bar{\rho} = \frac{\int_{(D)} \bar{r} dm}{\int_{(D)} dm} ; \quad \xi = \frac{\int_{(D)} x dm}{\int_{(D)} dm}, \quad \eta = \frac{\int_{(D)} y dm}{\int_{(D)} dm}, \quad \zeta = \frac{\int_{(D)} z dm}{\int_{(D)} dm}$$

Se deosebesc următoarele cazuri particulare:

- a. În cazul plăcilor omogene ( $dm = \mu_s dA$ ,  $\mu_s = \text{constant}$ ), expresiile vectorului de poziție și coordonatele centrului de greutate sunt date de relațiile:

$$\bar{\rho} = \frac{\int_{(s)} \bar{r} dA}{\int_{(s)} dA} ; \quad \xi = \frac{\int_{(s)} x dA}{\int_{(s)} dA}, \quad \eta = \frac{\int_{(s)} y dA}{\int_{(s)} dA}, \quad \zeta = \frac{\int_{(s)} z dA}{\int_{(s)} dA}$$

- b. În cazul barelor omogene ( $dm = \mu_l ds$ ,  $\mu_l = \text{constant}$ ) expresiile vectorului de poziție și coordonatele centrului de greutate sunt date de relațiile:

$$\bar{\rho} = \frac{\int_{(l)} \bar{r} ds}{\int_{(l)} ds} ; \quad \xi = \frac{\int_{(l)} x ds}{\int_{(l)} ds}, \quad \eta = \frac{\int_{(l)} y ds}{\int_{(l)} ds}, \quad \zeta = \frac{\int_{(l)} z ds}{\int_{(l)} ds}$$

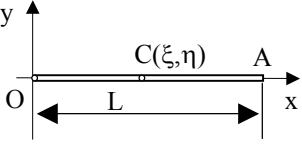
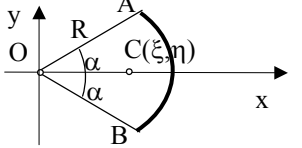
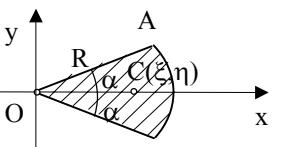
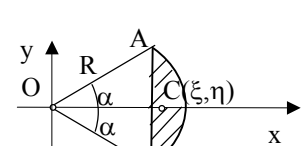
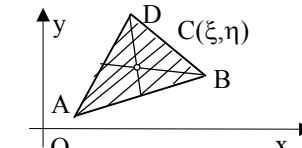
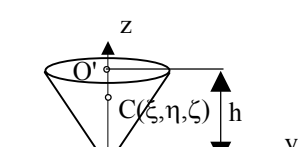
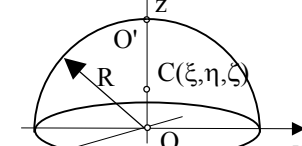
Dacă un sistem (continuum material) se compune dintr-un număr  $p$  de subsisteme  $(S_1), (S_2), \dots, (S_p)$  având masele:  $M_1, M_2, \dots, M_p$  și centrele de masă  $(C_1, C_2, \dots, C_p)$  având vectorii de poziție:  $\bar{\rho}_1, \bar{\rho}_2, \bar{\rho}_2, \dots, \bar{\rho}_p$ , atunci vectorul de poziție al centrului de masă al corpului se determină cu relația:

$$\bar{\rho} = \frac{\sum_{i=1}^p M_i \bar{\rho}_i}{\sum_{i=1}^p M_i} ; \quad \xi = \frac{\sum_{i=1}^p M_i x_i}{\sum_{i=1}^p M_i}, \quad \eta = \frac{\sum_{i=1}^p M_i y_i}{\sum_{i=1}^p M_i}, \quad \zeta = \frac{\sum_{i=1}^p M_i z_i}{\sum_{i=1}^p M_i}$$

Dacă un sistem material este rezultatul eliminării dintr-un sistem  $(S_1)$  de masă  $M_1$  și centru de masă  $C_1$ , a unui sistem  $(S_2)$  de masă  $M_2$  și centru de masă  $C_2$ , atunci vectorul de poziție al centrului de masă  $C$  este dat de:

$$\bar{\rho} = \frac{M_1 \bar{\rho}_1 - M_2 \bar{\rho}_2}{M_1 - M_2} ; \quad \xi = \frac{M_1 x_1 - M_2 x_2}{M_1 - M_2}, \quad \eta = \frac{M_1 y_1 - M_2 y_2}{M_1 - M_2}, \quad \zeta = \frac{M_1 z_1 - M_2 z_2}{M_1 - M_2}$$

În tabelul următor sunt date formule pentru calculul centrelor de greutate ale unor corpuri omogene uzuale:

Nr. crt.	Tipul corpului omogen	Figura	Coordonatele centrului de greutate
1	Bara omogenă de lungime L		$\xi = \frac{L}{2}; \quad \eta = 0$
2	Bara omogenă: arc de cerc de rază R și semideschiderea α		$\xi = R \frac{\sin \alpha}{\alpha}; \quad \eta = 0$
3	Placă omogenă în formă de sector circular de rază R și semideschiderea α		$\xi = \frac{2}{3} R \frac{\sin \alpha}{\alpha}; \quad \eta = 0$
4	Placă omogenă în formă de segment de cerc de rază R și semideschiderea α		$\xi = \frac{2}{3} R \frac{\sin^3 \alpha}{\alpha - \sin \alpha \cos \alpha}$ $\eta = 0$
5	Placă omogenă plană în formă de triunghi		$\xi = \frac{x_A + x_B + x_D}{3};$ $\eta = \frac{y_A + y_B + y_D}{3};$
6	Corp omogen conic de înălțime h		$\xi = 0; \quad \eta = 0;$ $\zeta = \frac{3h}{4}$
7	Corp omogen semisferic de rază R		$\xi = 0; \quad \eta = 0;$ $\zeta = \frac{3R}{8}$



### 3.1. CENTRUL DE MASĂ PENTRU BARE OMOGENE

#### PROBLEME REZOLVATE

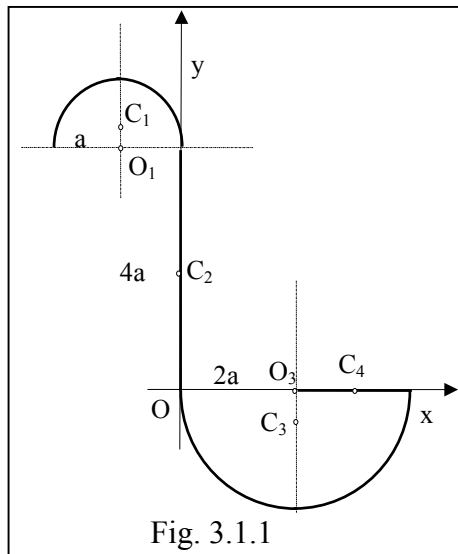


Fig. 3.1.1

**3.1.1** Se consideră o bară omogenă, de forma unui cârlig plan (în planul  $Oxy$  ca în fig. 3.1.1), pentru care se cunosc dimensiunea  $a$ , razele semicercurilor și lungimile barelor.

Se cer coordonatele centrului de masă al cârligului  $C(\xi, \eta)$ , în raport cu sistemul de axe dat.

**Rezolvare:**

Cârligul se compune din patru segmente de bară simple:

- două segmente sub formă de semicerc având centrele de masă notate cu  $C_1(x_1, y_1)$ ,  $C_3(x_3, y_3)$ , respectiv lungimile  $L_1$  și  $L_3$
- două segmente drepte având centrele de masă  $C_2(x_2, y_2)$ ,  $C_4(x_4, y_4)$  respectiv lungimile  $L_2, L_4$ .

Față de sistemul de axe  $Oxy$ , coordonatele centrului de masă  $C(\xi, \eta)$  al cârligului, se calculează cu formulele :

$$\xi = \frac{\sum_{i=1}^4 L_i x_i}{\sum_{i=1}^4 L_i}, \quad \eta = \frac{\sum_{i=1}^4 L_i y_i}{\sum_{i=1}^4 L_i}. \tag{a}$$

Pentru segmentul de bară (1) avem:

$$O_1 C_1 = R \frac{\sin \alpha}{\alpha} = a \frac{\sin \frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2a}{\pi} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -a \\ y_1 = 4a + \frac{2a}{\pi} \\ L_1 = \pi a \end{cases} \Rightarrow C_1 \left( -a, 4a + \frac{2a}{\pi} \right) \tag{b}$$

Pentru segmentul de bară (2) avem:

$$\begin{cases} x_2 = 0 \\ y_2 = 2a \\ L_2 = 4a \end{cases} \Rightarrow C_2(0, 2a) \tag{c}$$

Pentru segmentul de bară (3) avem:

$$O_3 C_3 = R \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 2a \frac{\sin \frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}} = \frac{4a}{\pi} \Rightarrow \begin{cases} x_3 = 2a \\ y_3 = -\frac{4a}{\pi} \\ L_3 = 2\pi a \end{cases} \Rightarrow C_3 \left( 2a, -\frac{4a}{\pi} \right) \tag{d}$$

Pentru segmentul de bară (4) avem:

$$x_4 = 3a, \quad y_4 = 0, \quad L_4 = 2a \Rightarrow C_4(3a, 0). \tag{e}$$

Se introduc valorile calculate în formulele lui  $\xi$  și  $\eta$  obținându-se:

$$\xi = a; \quad \eta = \frac{2(2\pi + 1)a}{3(\pi + 2)} \Rightarrow C\left(a, \frac{2(2\pi + 1)a}{3(\pi + 2)}\right) \tag{f}$$

Același rezultat se obține cu ajutorul următorului tabel:

Corpul nr.	Forma corpului	$L_i$	$x_i$	$y_i$	$L_i x_i$	$L_i y_i$
1		$\pi a$	$-a$	$4a + \frac{2a}{\pi}$	$-\pi a^2$	$(4\pi + 2) a^2$
2		$4a$	$0$	$2a$	$0$	$8a^2$
3		$2\pi a$	$2a$	$-\frac{4a}{\pi}$	$4\pi a^2$	$-8a^2$
4		$2a$	$3a$	$0$	$6a^2$	$0$
	$\Sigma \rightarrow$	$3a(\pi+2)$	$-$	$-$	$3a^2(\pi+2)$	$2a^2(2\pi+1)$

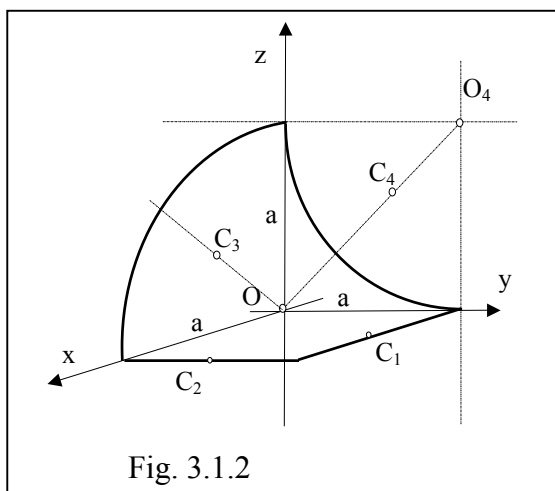


Fig. 3.1.2

**3.1.2** *Se consideră un cadru spațial format din 4 bare omogene sudate și dispuse în raport cu sistemul de axe Oxyz, ca în fig. 3.1.2. Se cunosc dimensiunea a, razele semicercurilor (lungimile barelor). Se cere poziția centrului de masă al cadrului în raport cu sistemul de axe ales*

**Rezolvare:**

Pentru arcele de cerc pozițiile centrelor de masă sunt date de:

$$OC_3 = R \frac{\sin \alpha}{\alpha} = a \frac{\sin \frac{\pi}{4}}{\frac{\pi}{4}} = \frac{2a\sqrt{2}}{\pi}, \quad O_4C_4 = R \frac{\sin \alpha}{\alpha} = a \frac{2a\sqrt{2}}{\pi} \tag{a}$$

Coordonatele centrelor de masă ale segmentelor de bară și lungimile acestora vor fi:

$$\begin{aligned}
 C_1\left(\frac{a}{2}, a, 0\right); \quad L_1 = a; & \quad C_3\left(\frac{2a}{\pi}, 0, \frac{2a}{\pi}\right); & \quad L_3 = \frac{\pi a}{2}; \\
 C_2\left(a, \frac{a}{2}, 0\right); \quad L_2 = a; & \quad C_4\left(a, \frac{a(\pi-2)}{\pi}, \frac{a(\pi-2)}{\pi}\right); & \quad L_4 = \frac{\pi a}{2}
 \end{aligned} \tag{b}$$

Pentru determinarea coordonatelor centrului de masă al cadrului spațial C (ξ,η,ζ) aplică formulele:

$$\xi = \frac{\sum_{i=1}^4 L_i x_i}{\sum_{i=1}^4 L_i}, \quad \eta = \frac{\sum_{i=1}^4 L_i y_i}{\sum_{i=1}^4 L_i}, \quad \zeta = \frac{\sum_{i=1}^4 L_i z_i}{\sum_{i=1}^4 L_i}. \tag{c}$$

Înlocuind valorile se obțin coordonatele centrului de greutate :

$$\xi = \frac{5}{2(\pi+2)} a, \quad \eta = \frac{\pi+1}{2(\pi+2)} a, \quad \zeta = \frac{\pi}{2(\pi+2)} a. \tag{d}$$

Același rezultat se obține completând următorul tabel:

Corp nr.	Forma corpului	$L_i$	$x_i$	$y_i$	$z_i$	$L_i x_i$	$L_i y_i$	$L_i z_i$
1		a	$\frac{a}{2}$	a	0	$\frac{a^2}{2}$	$a^2$	0
2		a	a	$\frac{a}{2}$	0	$a^2$	$\frac{a^2}{2}$	0
3		$\frac{\pi a}{2}$	$\frac{2a}{\pi}$	0	$\frac{2a}{\pi}$	$a^2$	0	$a^2$
4		$\frac{\pi a}{2}$	0	$\frac{a(\pi-2)}{\pi}$	$\frac{a(\pi-2)}{\pi}$	0	$\frac{a^2(\pi-2)}{2}$	$\frac{a^2(\pi-2)}{2}$
Σ		$a(2+\pi)$	—	—	—	$\frac{5a^2}{2}$	$\frac{(\pi+2)a^2}{2}$	$\frac{\pi a^2}{2}$

### S3.2. CENTRUL DE MASĂ PENTRU PLĂCI OMOGENE

#### PROBLEME REZOLVATE

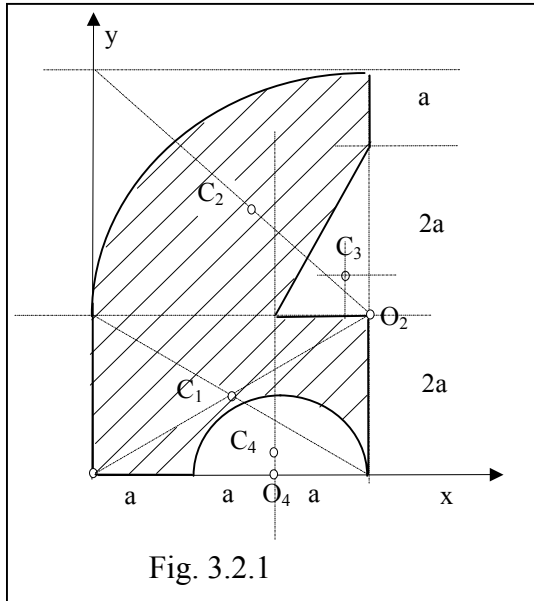


Fig. 3.2.1

**3.2.1** Se consideră o placă plană omogenă având forma din fig. 3.2.1 . Se cunoaște dimensiunea a.

Se cere să se determine poziția centrului de masă C (ξ,η ) al plăcii față de sistemul de axe Oxy considerat în fig. 3.2.1.

#### Rezolvare

Placa omogenă se compune din 4 părți simple având centrele de masă Ci (xi, yi) și ariile Ai (i=1,2,3,4) ca în fig. 3.2.1.

Ținând seama de relația care dă poziția centrul unui sector circular de rază R și unghi la centru 2α , avem:

$$O_2C_2 = \frac{2}{3} \cdot 3a \cdot \frac{\sin \frac{\pi}{4}}{\frac{\pi}{4}} = \frac{4\sqrt{2}a}{\pi}; \quad O_4C_4 = \frac{2}{3} \cdot a \cdot \frac{\sin \frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}} = \frac{4a}{3\pi} \quad (a)$$

Coordonatele centrului de masă al plăcii față de sistemul de axe Oxy se determină cu ajutorul relațiilor:

$$\xi = \frac{A_1x_1 + A_2x_2 - A_3x_3 - A_4x_4}{A_1 + A_2 - A_3 - A_4}, \quad \eta = \frac{A_1y_1 + A_2y_2 - A_3y_3 - A_4y_4}{A_1 + A_2 - A_3 - A_4} \quad (b)$$

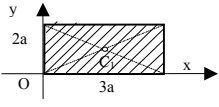
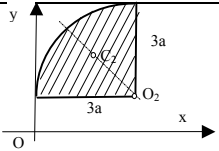
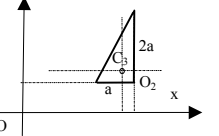
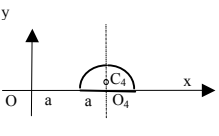
Pentru fiecare din cele patru plăci simple: placa 1(dreptunghiul 3a x 2a), placa 2 (sector circular de rază 3a), placa 3 (triunghiul a x 2a , care se decupează) și placa 4 (sector circular de rază a , care se decupează) avem:

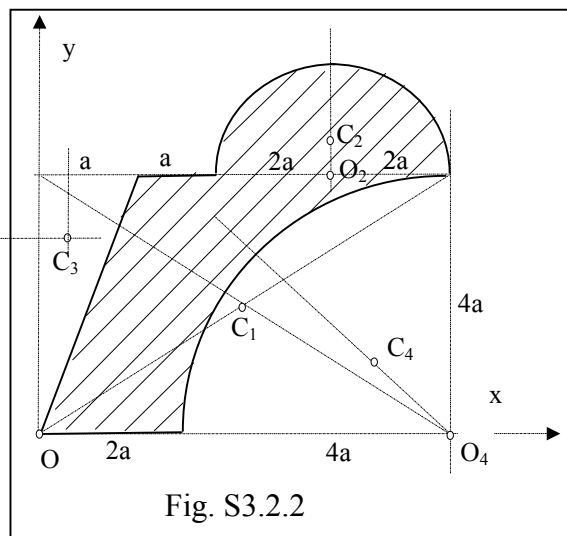
$$\begin{aligned} x_1 &= 3a/2; \quad y_1 = a; \quad A_1 = 6a^2 \\ x_2 &= 3a - 4a/\pi; \quad y_2 = 2a + 4a/\pi; \quad A_2 = 9\pi a^2 / 4 \\ x_3 &= 8a/3; \quad y_3 = 8a/3; \quad A_3 = a^2 \\ x_4 &= 2a; \quad y_4 = 4a/3\pi; \quad A_4 = \pi a^2 / 2 \end{aligned} \quad (c)$$

Înlocuind în relațiile lui ξ și η de mai sus se obține:

$$\xi = \frac{(69\pi - 32)}{3(7\pi + 20)} a, \quad \eta = \frac{2(27\pi + 70)}{3(7\pi + 20)} a, \text{ sau } \xi = 1,4667a; \quad \eta = 2,458a. \quad (d)$$

La același rezultat se ajunge completând următorul tabel :

Corpul nr.	Figura	$A_i$	$x_i$	$y_i$	$A_i x_i$	$A_i y_i$
1		$6a^2$	$\frac{3a}{2}$	$a$	$9a^3$	
2		$\frac{9a^2\pi}{4}$	$3a - \frac{4a}{\pi}$	$2a + \frac{4a}{\pi}$	$\frac{9}{4}a^3(3\pi - 4)$	$\frac{9a^3}{2}(\pi - 2)$
3		$-a^2$	$\frac{8a}{3}$	$\frac{8a}{3}$	$-\frac{8a^3}{3}$	$-\frac{8a^3}{3}$
4		$-\frac{\pi a^2}{2}$	$2a$	$\frac{4a}{3\pi}$	$-\pi a^3$	$-\frac{2}{3}a^3$
	$\Sigma \rightarrow$	$\frac{7\pi + 20}{4}a$	-	-	$\frac{69\pi - 32}{12}a^3$	$\frac{27\pi + 70}{6}a^3$



**3.2.2** Se consideră o placă plană omogenă având forma din fig. 3.2.2. pentru care se cunoaște dimensiunea  $a$ . Se cere să se determine poziția centrului de masă  $C (\xi, \eta)$  al plăcii față de sistemul de axe  $Oxy$  considerat.

**Rezolvare**

Coordonatele centrului de masă al plăcii față de sistemul de axe  $Oxz$  se determină cu ajutorul relațiilor:

$$\xi = \frac{A_1x_1 + A_2x_2 - A_3x_3 - A_4x_4}{A_1 + A_2 - A_3 - A_4}, \quad \eta = \frac{A_1y_1 + A_2y_2 - A_3y_3 - A_4y_4}{A_1 + A_2 - A_3 - A_4} \quad (a)$$

Ținând seama de relația care dă poziția centrul unui sector circular de rază  $R$  și unghi la centru  $2\alpha$ , avem:

$$O_2C_2 = \frac{2}{3} \cdot 2a \cdot \frac{\sin \frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}} = \frac{8a}{3\pi}; \quad O_4C_4 = \frac{2}{3} \cdot 4a \cdot \frac{\sin \frac{\pi}{4}}{\frac{\pi}{4}} = \frac{16\sqrt{2}a}{3\pi} \quad (b)$$

Pentru placa simplă 1 (dreptunghiul  $6a \times 4a$ ):

$$x_1 = 3a; y_1 = 2a; A_1 = 24a^2 \quad (c)$$

Pentru placa simplă 2 (sector circular de rază  $2a$ ):

$$x_2 = 4a; y_2 = 4a + 8a / 3\pi; A_2 = 2\pi a^2 \quad (d)$$

Pentru placa simplă 3 (triunghiul  $4a \times a$ , care se decupează):

$$x_3 = a / 3; y_3 = 8a / 3; A_3 = 2a^2 \quad (e)$$

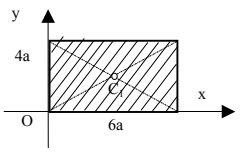
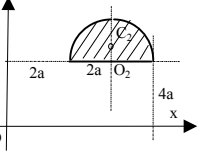
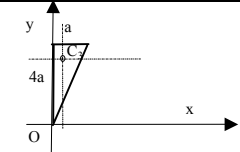
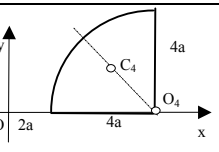
Pentru placa simplă 4 (sector circular de rază  $4a$ , care se decupează):

$$x_4 = 6a - 16a / 3\pi; y_4 = 16a / 3\pi; A_4 = 4\pi a^2 \quad (f)$$

Înlocuind în relația de mai sus se obține:

$$\xi = \frac{136 - 24\pi}{3(11 - \pi)} a = 2,57a ; \eta = \frac{4(10 + 3\pi)}{3(11 - \pi)} a = 3,296a \quad (g)$$

La același rezultat se ajunge dacă se completează următorul tabel :

Figura nr.	Forma	$A_i$	$x_i$	$y_i$	$A_i x_i$	$A_i y_i$
1		$24a^2$	$3a$	$2a$	$72a^3$	$48a^3$
2		$2\pi a^2$	$4a$	$4a + \frac{8a}{3\pi}$	$8\pi a^3$	$(8\pi + \frac{13}{3})a^3$
3		$-2a^2$	$\frac{a}{3}$	$\frac{8a}{3}$	$-\frac{2}{3}a^3$	$-\frac{16}{3}a^3$
4		$-4\pi a^2$	$6a - \frac{16a}{3\pi}$	$\frac{16a}{3\pi}$	$(24\pi + \frac{64}{3})a^3$	$-\frac{64}{3}a^3$
$\Sigma$		$(22 - 2\pi)a^2$	-	-	$\frac{278 - 48\pi}{3}a^3$	$\frac{80 + 24\pi}{3}a^3$

**3.2.3** *Se consideră o placă omogenă de forma unui pătrat de latură  $a$  din care se decupează un triunghi isoscel de înălțime  $h$  ca în fig. 3.2.3. Se cere să se determine înălțimea triunghiului isoscel astfel încât centrul de masă  $C(\xi, \eta)$  să coincidă cu vârful triunghiului.*

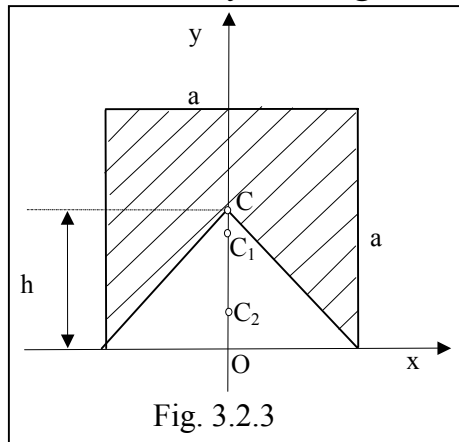


Fig. 3.2.3

**Rezolvare:**

Față de sistemul de axe  $Oxy$  din fig. 3.2.3, coordonatele centrelor de greutate pentru pătrat și pentru triunghi sunt:

$$C_1(0, a/2), \quad C_2(0, h/3) \tag{a}$$

iar ariile corespunzătoare sunt:

$$A_1 = a^2, \quad A_2 = \frac{ah}{2}. \tag{b}$$

Coordonata a centrului de greutate după  $Oy$  se determină cu ajutorul relației:  $\eta = \frac{A_1 y_1 - A_2 y_2}{A_1 - A_2}$ . (c)

Condiția  $\eta = h$  conduce la următoarea ecuație de gradul II în  $h$ :  
 $2h^2 - 6ah + 3a^2 = 0$  având soluțiile:  $h_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{2} a$  (e)

Întrucât  $h < a$ , are sens numai  $h = \frac{3 - \sqrt{3}}{2} a = 0,634a$  (f)

**PROBLEME PROPUSE**

*Pentru plăcile plane omogene având forma și dimensiunile ca în figurile 3.2.4... 3.2.13 se cere să se determine poziția centrului de greutate  $C(\xi, \eta)$  în raport cu sistemul de axe  $Oxy$  considerat.*

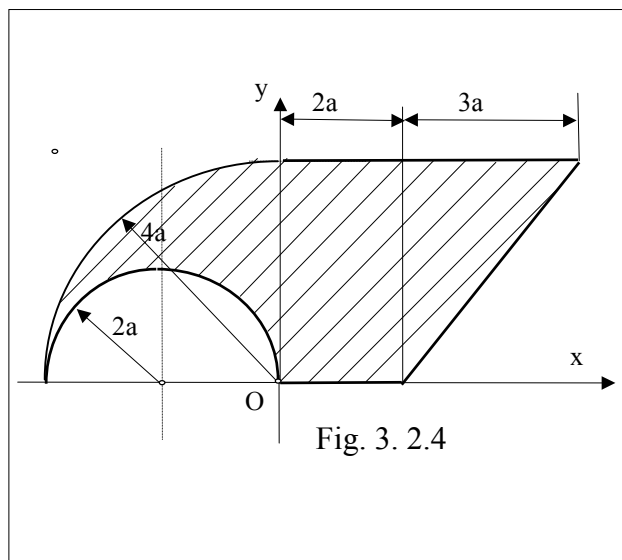


Fig. 3. 2.4

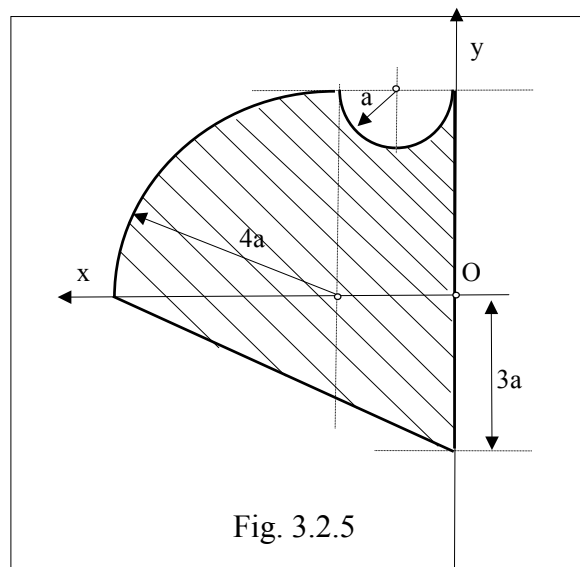
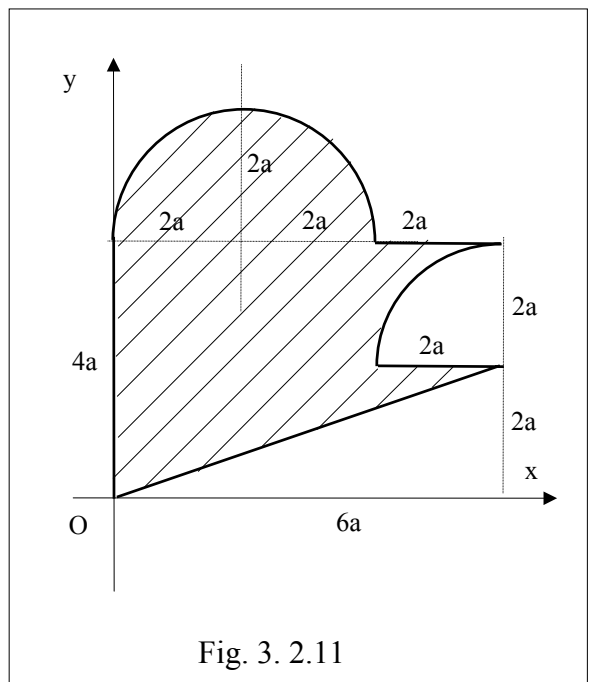
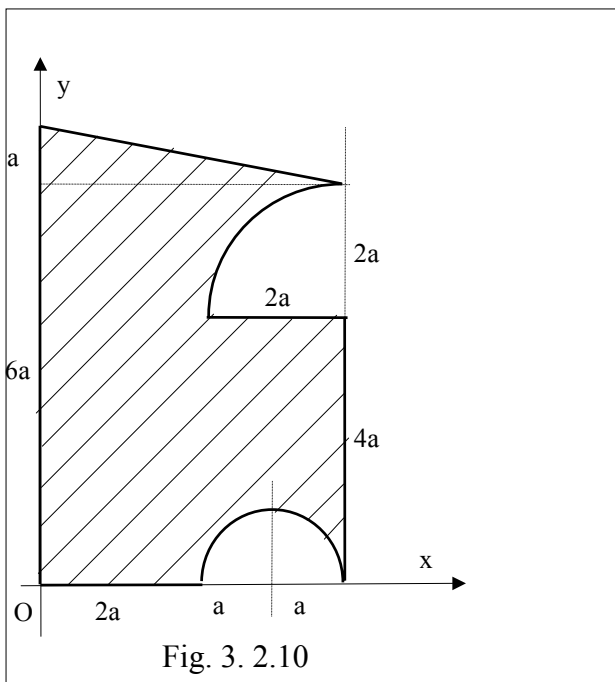
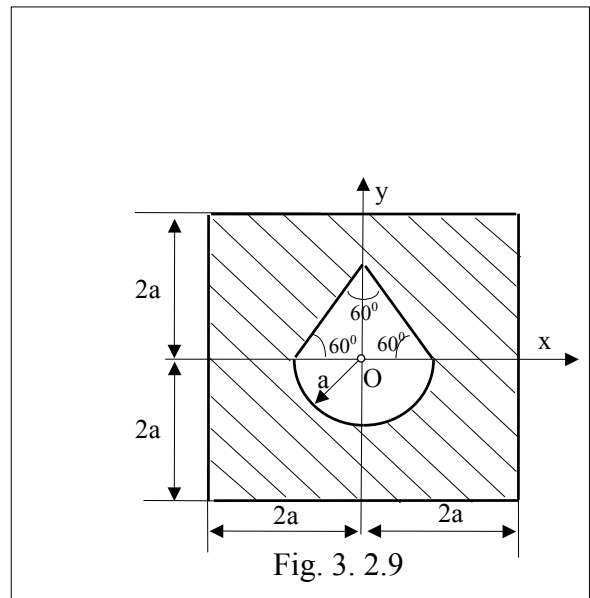
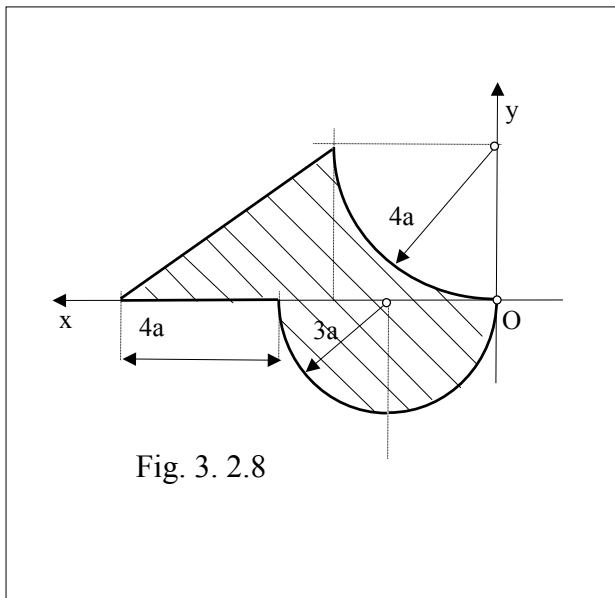
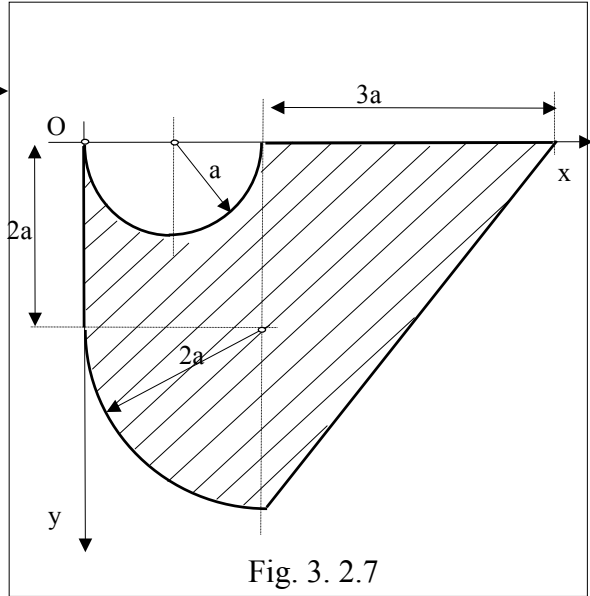
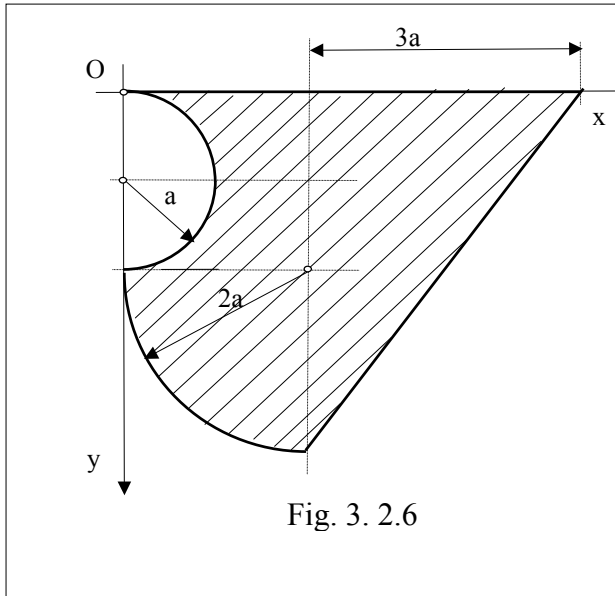


Fig. 3.2.5





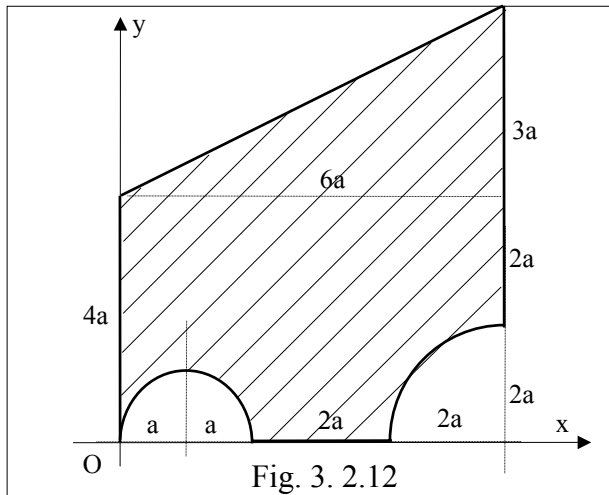


Fig. 3. 2.12

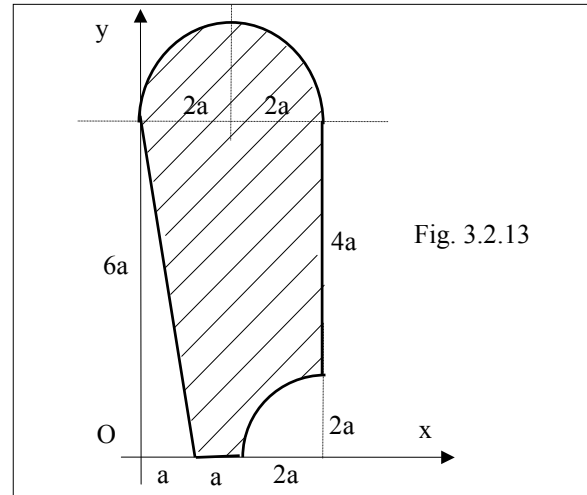


Fig. 3.2.13

RĂSPUNSURI

Nr.pr.	$\xi$	$\eta$
3.2.4	$\frac{(12\pi + 14)a}{3(2\pi + 14)} = 0,8496a$	$\frac{48a}{(2\pi + 14)} = 2,3665a$
3.2.5	$\frac{(284 + 45\pi)a}{3(34 + 7\pi)} = 2,5324a$	$\frac{2(29 - 2\pi)a}{(34 + 7\pi)} = 0,8114a$
3.2.6	$\frac{2(56 + 6\pi)a}{3(20 + \pi)} = 2,1563a$	$\frac{(88 + 9\pi)a}{3(20 + \pi)} = 1,6748a$
3.2.7	$\frac{(116 + 9\pi)a}{3(20 + \pi)} = 2,6212a$	$\frac{2(14 + 2\pi)a}{(20 + \pi)} = 1,753a$
3.2.8	$\frac{(520 + 81\pi)a}{3(56 + \pi)} = 4,365a$	$\frac{2(154 - 48\pi)a}{3(56 + \pi)} = 0,0361a$
3.2.9	0	$-\frac{5a}{3(32 - 2\sqrt{3} - \pi)} = 0,0656a$
3.2.10		
3.2.11		
3.2.12		
3.2.13		

3.3. CENTRUL DE MASĂ PENTRU CORPURI OMOGENE

PROBLEME REZOLVATE

3.3.1 Se consideră un corp omogen tridimensional cu o axă de simetrie, având forma din fig. 3.3.1, format dintr-o emisferă de diametru  $D=2R=40\text{mm}$  și un cilindru de înălțime  $h=50\text{mm}$  și diametru  $d=2r=22\text{mm}$ .

Se cere să se determine poziția centrului de greutate al nitului C ( 0,0, $\zeta$ ) în raport cu sistemul de axe considerat în figură.

**Rezolvare**

Pentru sistemul de axe Oxyz considerat în fig. 3.3.1 centrele de greutate ale celor două corpuri simple se află pe axa de simetrie Oz; astfel:

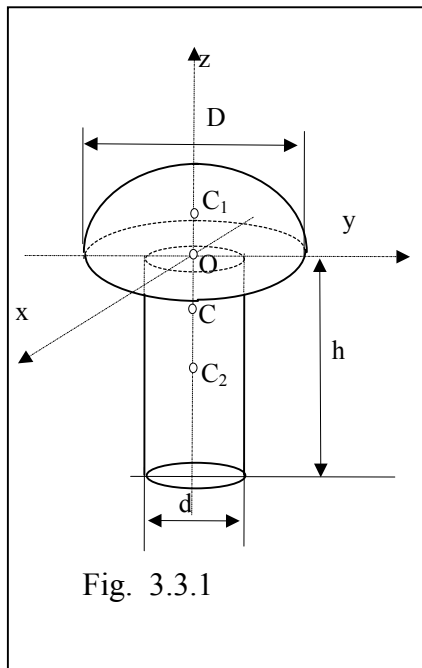


Fig. 3.3.1

➤ pentru emisferă:

$$OC_1 = z_1 = \frac{3R}{8} = \frac{3D}{16} \quad V_1 = \frac{\pi D^3}{12}; \quad (a)$$

➤ pentru cilindru:

$$OC_2 = -z_2 = \frac{h}{2}, \quad V_2 = \frac{\pi d^2 h}{4}. \quad (b)$$

$$\zeta = \frac{V_1 z_1 + V_2 z_2}{V_1 + V_2} = \frac{3(D^4 - 8d^2 h^2)}{16(D^3 + 3d^2 h)} \quad (c)$$

Se obține:  $\zeta = -0,977 \text{ cm}$  (d)

**3.3.2. Se consideră un corp omogen tridimensional cu o axă de simetrie format dintr-o emisferă și un con ca în fig. 3.3.2. Se cunoaște raza semisferei R și a bazei conului r = R.**

**Se cere înălțimea h a conului astfel încât centrul de greutate al corpului să coincidă cu centrul bazei conului (sau cu originea sistemului de axe  $C \equiv O$ )**

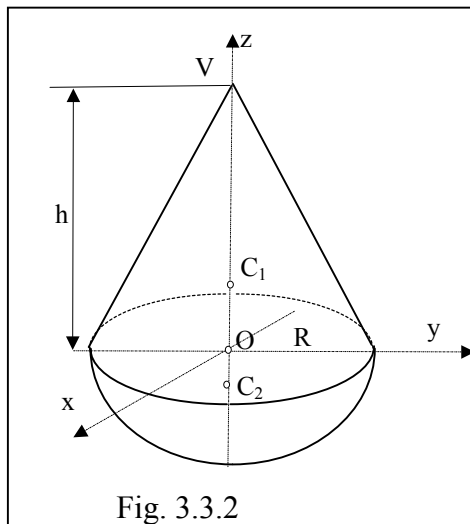


Fig. 3.3.2

**Rezolvare:**

Conul și emisfera au centrele de greutate  $C_1$  și  $C_2$  pe axa Oz având coordonatele :

$$z_1 = OC_1 = \frac{h}{4}, \quad z_2 = -OC_2 = -\frac{3}{8}R \quad (a)$$

Volumele celor două corpuri simple sunt:

$$V_1 = \frac{\pi}{3} R^2 h; \quad V_2 = \frac{2}{3} \pi R^3 \quad (b)$$

Coordonata centrului de greutate după axa Oz se determină cu ajutorul relației:

$$\zeta = \frac{V_1 z_1 + V_2 z_2}{V_1 + V_2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{h^2 - 3R^2}{h + 2R} \quad (c)$$

Impunând condiția:  $C \equiv O$ , adică  $\zeta = 0$  rezultă:

$$h^2 - 3R^2 = 0 \quad (d)$$

cu soluțiile  $h = \pm R\sqrt{3}$ , are sens numai  $h = R\sqrt{3} = 1,732R$  (e)

# CAPITOLUL IV

## ECHILIBRUL FORTELOR APLICATE SOLIDULUI RIGID

### REZUMAT DE TEORIE

#### a. Teoremele generale ale echilibrului rigidului liber

În cazul rigidului liber, echilibrul este realizat dacă și numai dacă *torsorul de reducere* al sistemului de forțe care acționează asupra lui, într-un punct O, este nul:

$$\tau_o = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \bar{R} = 0 \\ \bar{M}_o = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sum X_i = 0, & \sum Y_i = 0, & \sum Z_i = 0 \\ \sum L_i = 0, & \sum M_i = 0, & \sum N_i = 0 \end{cases}$$

unde:

- $X_i, Y_i, Z_i$  sunt proiecțiile forțelor exterioare  $\bar{F}_i$  pe axele sistemului cartezian Ox, Oy, respectiv Oz;
- $x_i, y_i, z_i$  - coordonatele punctului de aplicație al forței  $\bar{F}_i$
- $L_i = \sum (y_i Z_i - z_i Y_i)$ ,  $M_i = \sum (z_i X_i - x_i Z_i)$ ,  $N_i = \sum (x_i Y_i - y_i X_i)$  - proiecțiile momentelor forțelor exterioare  $\bar{F}_i$  pe axele sistemului cartezian Ox, Oy, respectiv Oz;

Dacă sistemul de forțe ce acționează asupra rigidului liber este coplanar (de exemplu: se află în planul Oxy) atunci ecuațiile de mai sus devin:

$$\tau_o = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \bar{R} = 0 \\ \bar{M}_o = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sum X_i = 0, & \sum Y_i = 0 \\ \sum N_i = 0 \end{cases}$$

#### b. Teoremele generale ale echilibrului rigidului supus la legături

Dacă rigidul este supus la legături (prin legături se înțelege un număr de constrângeri geometrice care se aplică rigidului care duc la micșorarea numărului de grade de libertate - pentru rigidul liber acest număr este 6), se aplică axioma legăturilor care postulează că: *orice legătură geometrică poate fi întotdeauna suprimată și înlocuită cu elemente mecanice corespunzătoare (care pot fi forțe sau momente-cupluri de legătură) numite reacțiuni.*

Dacă se notează torsorul forțelor de legătură cu:

$$\tau_o^{leg} \Leftrightarrow \begin{cases} \bar{R}^{leg} \\ \bar{M}_o^{leg} \end{cases}$$

și torsorul forțelor exterioare (aplicate) cu:

$$\tau_o^a \Leftrightarrow \begin{cases} \bar{R}^a \\ \bar{M}_o^a \end{cases}$$

atunci echilibrul rigidului este realizat dacă și numai dacă :

$$\tau_o^a + \tau_o^{leg} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \bar{R}^a + \bar{R}^{leg} = 0 \\ \bar{M}_o^a + \bar{M}_o^{leg} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} X^a + X^{leg} = 0, & Y^a + Y^{leg} = 0, & Z^a + Z^{leg} = 0 \\ L^a + L^{leg} = 0, & M^a + M^{leg} = 0, & N^a + N^{leg} = 0 \end{cases}$$

**Legăturile ideale uzuale ale rigidului sunt :**

- reazemul simplu (prinderea cu fir)
- articulația sferică
- articulația cilindrică (articulația plană)
- încastrarea.

Prin suprimarea unei legături, conform axiomei legăturilor se introduc elemente mecanice corespunzătoare tipului de posibilități de mișcare suprimate: forțe dacă sunt suprimate translații, cupluri dacă sunt suprimate rotații. Aceste elemente sunt necunoscute ale problemei date.

Dacă rigidul este supus unor legături reale (cu frecare) atunci la condițiile de echilibru de mai sus (cele 6 ecuații generale) se mai adaugă relația/relațiile corespunzătoare tipului de legătură cu frecare existent și anume:

- frecarea de alunecare din cuplele de alunecare:  $T \leq \mu N$  ;
- frecarea de rostogolire din cuplele de rostogolire:  $M_r \leq sN$  ;
- frecarea de pivotare din pivoți axiali:  $M_p \leq \mu R_m N$  ;
- frecarea din lagărele cu alunecare:  $M_f \leq \mu r F$  .

În toate cazurile legăturilor cu frecare , aceste forțe /cupluri se opun totdeauna tendinței corpului de a executa orice fel de mișcare.

## 4.1. ECHILIBRUL RIGIDULUI LIBER SUB ACȚIUNEA UNUI SISTEM SPAȚIAL DE FORȚE

### PROBLEME REZOLVATE

**4.1.1. Se consideră o placă omogenă în formă de paralelipiped dreptunghic cu muchiile  $OA=4a$ ,  $OC=6a$ ,  $OO'=a$ , aflată în echilibru sub acțiunea greutateii proprii  $G$ , a forței  $P$  cunoscute ca direcție sens și modul și a forțelor  $(F_i)_{i=1, 2, \dots, 6}$ , cunoscute ca direcție și sensuri dar necunoscute ca modul (fig. 4.1.1). Se cer mărimile forțelor  $F_i$  pentru ca echilibrul forțelor să aibă loc .**

**Rezolvare:**

Expresiile analitice ale vectorilor forțe față de sistemul de axe Oxy sunt:

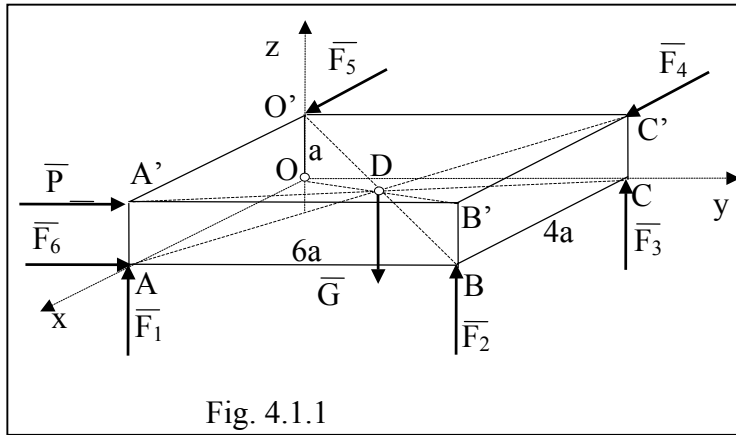


Fig. 4.1.1

$$\begin{aligned} \bar{P} &= P\bar{j}; & \bar{G} &= -G\bar{k} \\ \bar{F}_1 &= F_1\bar{k}; & \bar{F}_2 &= F_2\bar{k} \\ \bar{F}_3 &= F_3\bar{k}; & \bar{F}_4 &= F_4\bar{i}; \\ \bar{F}_5 &= F_5\bar{i}; & \bar{F}_6 &= F_6\bar{j}; \end{aligned} \quad (a)$$

Expresiile analitice ale momentelor acestor forțe în raport cu O sunt:

$$\begin{aligned} \bar{M}_O(\bar{P}) &= \overline{OA'} \times \bar{P} = (4a\bar{i} + a\bar{k}) \times P\bar{j} = 4aP\bar{k} - aP\bar{i} \\ \bar{M}_O(\bar{G}) &= \overline{OD} \times \bar{G} = (2a\bar{i} + 3a\bar{j} + 0,5a\bar{k}) \times (-G\bar{k}) = 2aG\bar{j} - 3aG\bar{i} \\ \bar{M}_O(\bar{F}_1) &= \overline{OA} \times \bar{F}_1 = 4a\bar{i} \times F_1\bar{k} = -4aF_1\bar{j} \\ \bar{M}_O(\bar{F}_2) &= \overline{OB} \times \bar{F}_2 = (4a\bar{i} + 6a\bar{j}) \times F_2\bar{k} = -4aF_2\bar{j} + 6aF_2\bar{i} \\ \bar{M}_O(\bar{F}_3) &= \overline{OC} \times \bar{F}_3 = 6a\bar{j} \times F_3\bar{k} = 6aF_3\bar{i} \\ \bar{M}_O(\bar{F}_4) &= \overline{OC'} \times \bar{F}_4 = (6a\bar{j} + a\bar{k}) \times F_4\bar{i} = -6aF_4\bar{k} + aF_4\bar{j} \\ \bar{M}_O(\bar{F}_5) &= \overline{OO'} \times \bar{F}_5 = a\bar{k} \times F_5\bar{i} = aF_5\bar{j} \\ \bar{M}_O(\bar{F}_6) &= \overline{OA} \times \bar{F}_6 = 4a\bar{i} \times F_6\bar{j} = 4aF_6\bar{k} \end{aligned} \quad (b)$$

Ecuțiile vectoriale de echilibru ale rigidului liber ( $\bar{R} = 0; \bar{M}_O = 0$ ), scrise în proiecții pe cele trei axe ale sistemului triortogonal Oxyz sunt:

$$\begin{aligned} X &= F_4 + F_5 = 0 & L &= -aP - 3aG + 6aF_2 + 6aF_3 = 0 \\ Y &= F_6 + P = 0 & M &= 2aG - 4aF_1 - 4aF_2 + aF_4 + aF_5 = 0 \\ Z &= F_1 + F_2 + F_3 - G = 0 & N &= 4aP - 6aF_4 + 4aF_6 = 0 \end{aligned} \quad (c)$$

Rezolvând acest sistem de 6 ecuații cu 6 necunoscute rezultă:

$$F_1 = G/2 - P/6; \quad F_4 = 0; \quad F_2 = P/6; \quad F_5 = 0; \quad F_3 = G/2; \quad F_6 = -P. \quad (d)$$

## 4.2. ECHILIBRUL RIGIDULUI SUPUS LA LEGĂTURI SUB ACȚIUNEA UNUI SISTEM DE FORȚE COPLANARE

### PROBLEME REZOLVATE

**4.2.1** Se consideră o bară omogenă de lungime  $AB=2\ell$  și greutate  $G$  care se rezemă cu capătul  $A$  pe un perete vertical iar în punctul  $D$  pe o muchie fixă situată la distanța  $a$  față de peretele vertical (fig. 4.2.1.a). Legăturile din  $A$  și  $D$  sunt fără frecare. Se cer: 1) unghiul  $\theta$  pe care îl face bara cu orizontala pentru echilibru; 2) mărimile reacțiunilor din  $A$  și  $D$ .

**Rezolvare**

Se alege sistemul de referință Oxy convenabil și conform axiomei legăturilor se introduc în A și D forțele de legătură  $\bar{N}_A$  și  $\bar{N}_D$  (fig. 4.2.1.b).

Ecuțiile de echilibru a forțelor care acționează asupra barei scrise în proiecții pe cele trei axe sunt:

$$\begin{aligned} \sum X_i = 0: & \quad N_A - N_D \sin \theta = 0 \\ \sum Y_i = 0: & \quad N_D \cos \theta - G = 0 \\ \sum M_{Az} = 0: & \quad -Gl \cos \theta + N_D \frac{a}{\cos \theta} = 0 \end{aligned}$$

Primele două ecuații conduc la:

$$N_D = \frac{1}{\cos \theta} G, \quad N_A = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} G$$

care introduse în ecuația a treia conduc la:

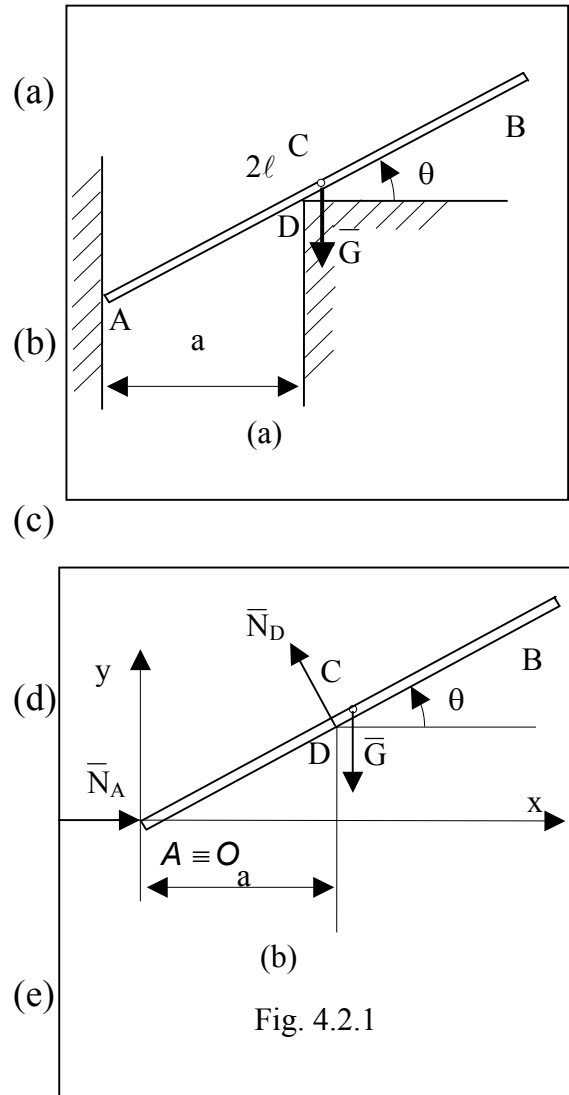
$$\cos \theta = \sqrt[3]{\frac{a}{\ell}}, \quad \text{sau} \quad \theta = \arccos \sqrt[3]{\frac{a}{\ell}}$$

Echilibrul este posibil dacă:

$$0 \leq \sqrt[3]{\frac{a}{\ell}} \leq 1, \quad \text{sau} \quad 0 \leq a \leq \ell$$

Înlocuind valoarea unghiului  $\theta$  în expresiile reacțiunilor  $N_A$  și  $N_D$  se obține:

$$\begin{aligned} N_D &= G \cdot \sqrt[3]{\frac{\ell}{a}}, \\ N_A &= G \cdot \sqrt[3]{\frac{\ell}{a}} \cdot \sqrt[3]{1 - \left(\frac{a}{\ell}\right)^2} \end{aligned}$$



**4.2.2 Se consideră o bară omogenă de lungime  $AB=2\ell$  și greutate  $G$  care se reazemă cu capătul  $A$  în colțul format de un perete orizontal și unul vertical, iar în punctul  $D$  se reazemă pe o muchie fixă situată la distanța  $a$  față de peretele vertical (fig. 4.2.2.a). Legătura din  $D$  este fără frecare.**

**Se cer** mărimile reacțiunilor din  $A$  și  $D$ .

**Rezolvare**

Se alege sistemul de referință Oxy ca în fig. 4.2.2.b și conform axiomei legăturilor se introduc în A și D forțele de legătură  $\bar{N}_A$  și  $\bar{N}_D$

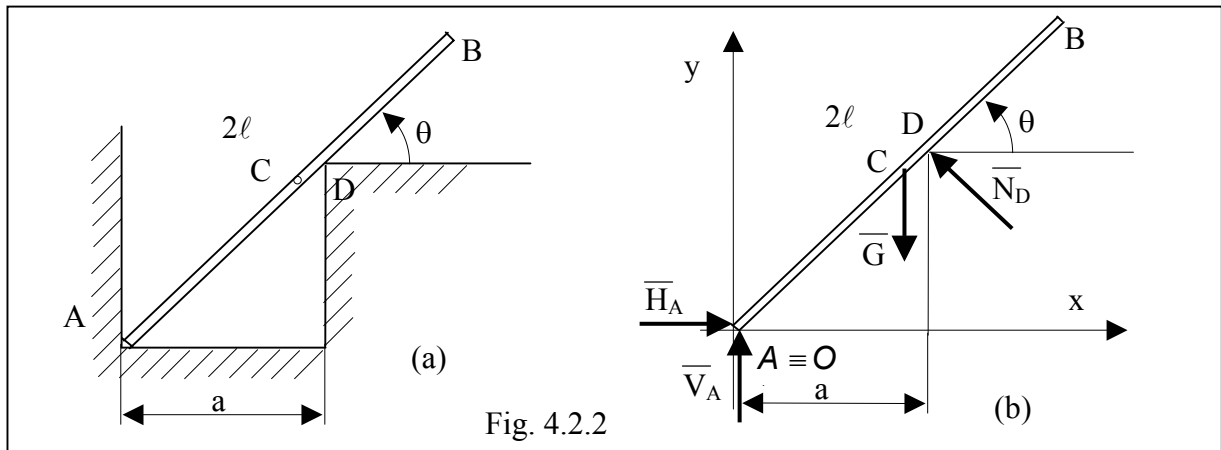


Fig. 4.2.2

Ecuțiile de echilibru a forțelor care acționează asupra barei în proiecții pe cele trei axe se scriu:

$$\begin{aligned} \sum X_i = 0 & \quad H_A - N_D \sin \theta = 0 \\ \sum Y_i = 0 & \quad V_A + N_D \cos \theta - G = 0 \\ \sum M_{zA} = 0 & \quad -G\ell \cos \theta + N_D \frac{a}{\cos \theta} = 0 \end{aligned} \tag{a}$$

Din ecuația a treia se obține:

$$N_D = G \frac{\ell}{a} \cos^2 \theta \tag{b}$$

iar din primele două ecuații rezultă componentele reacțiunii din A:

$$\begin{aligned} H_A &= G \cdot \frac{\ell}{a} \cdot \sin \theta \cdot \cos^2 \theta; \\ V_A &= G \left( 1 - \frac{\ell}{a} \cos^3 \theta \right). \end{aligned} \tag{c}$$

Deci mărimea reacțiunii din A este:

$$R_A = \sqrt{H_A^2 + V_A^2} = G \cdot \sqrt{\left( \frac{\ell}{a} \cdot \sin \theta \cdot \cos^2 \theta \right)^2 + \left( 1 - \frac{\ell}{a} \cos^3 \theta \right)^2} \tag{d}$$

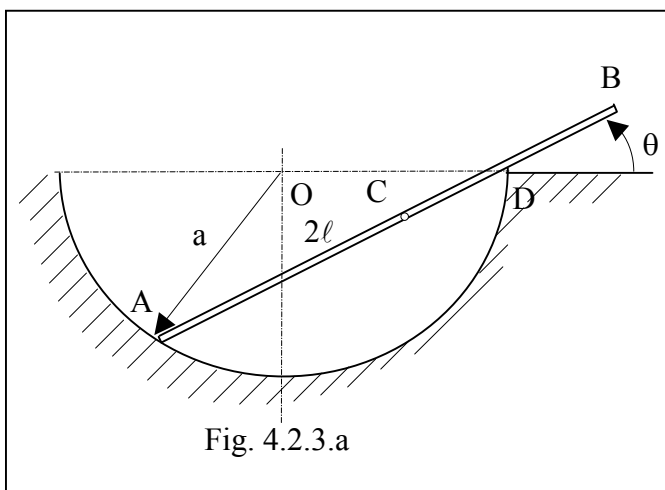
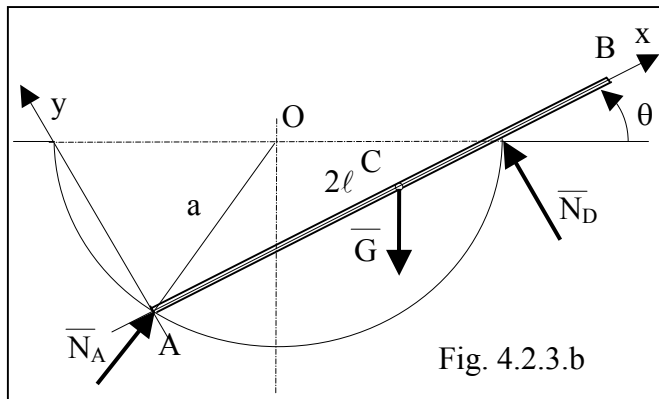


Fig. 4.2.3.a

**4.2.3 Se consideră o bară omogenă de lungime  $AB=2\ell$  și greutate  $G$  care se reazemă cu capătul  $A$  pe o cavitate semicilindrică de rază  $a$ , iar în punctul  $D$  pe muchia fixă a cavității (fig. 4.2.3.a). Rezemările din  $A$  și  $D$  sunt fără frecare.**

**Se cer:**

- 1) unghiul  $\theta$  pe care îl face bara cu orizontala pentru echilibru;
- 2) mărimile reacțiunilor din  $A$  și  $D$ .



**Rezolvare**

Se alege sistemul de referință Oxy convenabil și conform axiomei legăturilor se introduc în A și D forțele de legătură  $\bar{N}_A$  și  $\bar{N}_D$  (fig. 4.2.3.b). Ecuațiile de echilibru a forțelor care acționează asupra barei se scriu:

$$\begin{aligned} \sum X_i = 0 & : N_A - G \sin \theta = 0 \\ \sum Y_i = 0 & : N_A \sin \theta + N_D - G \cos \theta = 0 \\ \sum M_{zA} = 0 & : -G \ell \cos \theta + N_D 2a \cos \theta = 0 \end{aligned} \tag{a}$$

Din prima și a treia ecuație se obțin mărimile reacțiunilor  $\bar{N}_A$  și  $\bar{N}_D$ :

$$N_A = G \sin \theta; \quad N_D = G \frac{\ell}{2a} \tag{b}$$

Înlocuind aceste valori în ecuația (b) rezultă ecuația de gr. II:

$$4a \cos^2 \theta - \ell \cos \theta - 2a = 0 \tag{c}$$

având soluțiile:  $\cos \theta = \frac{\ell \pm \sqrt{\ell^2 + 32a^2}}{8a}$ . (d)

Întrucât problema are sens dacă :  $0 \leq \theta \leq \pi / 2$ , este valabilă doar soluția pozitivă. Condiția de echilibru se scrie:  $\frac{\ell + \sqrt{\ell^2 + 32a^2}}{8a} \leq 1 \Rightarrow \ell \leq 2a$  (e)

**4.2.4 Se consideră o placă triunghiulară omogenă de greutate G situată în plan vertical, care se reazemă în A pe un perete vertical iar în punctul O este articulată de mediul fix (dimensiunile plăcii și distanța de la articulație la peretele vertical sunt date în fig. 4.2.4.a). Legăturile din A și O sunt fără frecare. Se cer mărimile reacțiunilor din A și O.**

**Rezolvare**

Se alege sistemul de referință Oxy convenabil și conform axiomei legăturilor se introduc în A și O forțele de legătură  $\bar{N}_A$ ,  $\bar{X}_O$  și  $\bar{Y}_O$  (fig. 4.2.4.b). Ecuațiile de echilibru a forțelor care acționează asupra barei, în proiecții pe cele trei axe se scriu:

$$\begin{aligned} \sum X_i = 0 & \quad X_O - G \sin \theta - N_A \cos \theta = 0 \\ \sum Y_i = 0 & \quad Y_O - G \cos \theta + N_A \sin \theta = 0 \\ \sum M_{zO} = 0 & \quad (N_A \sin \theta)8a + (G \sin \theta)y_C - (G \cos \theta)x_C = 0 \end{aligned} \tag{a}$$



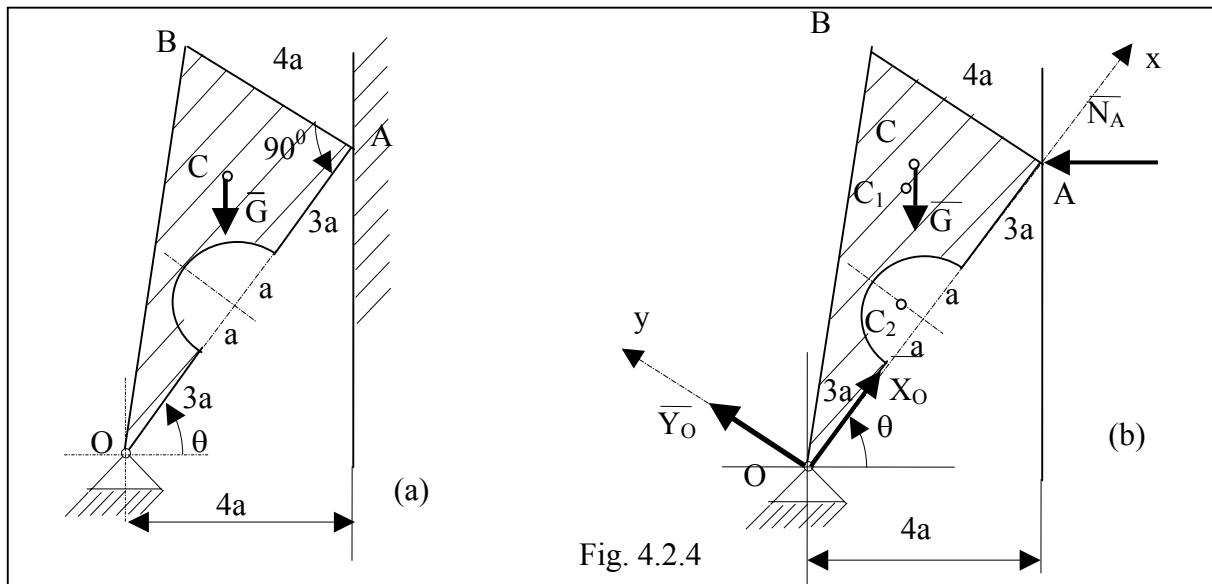


Fig. 4.2.4

Din a treia ecuație (a) se obține :

$$N_A = G \left( \frac{x_c \cos \theta}{8a \sin \theta} - \frac{y_c}{8a} \right); \tag{b}$$

Înlocuind această valoare în prima și a doua ecuație (a) rezultă:

$$X_o = G \left( \sin \theta - \frac{x_c \cos^2 \theta}{8a \sin \theta} - \frac{y_c \cos \theta}{8a} \right); \tag{c}$$

$$Y_o = G \left( \cos \theta + \frac{y_c \sin \theta}{8a} - \frac{x_c \cos \theta}{8a} \right)$$

Din triunghiul OBA se determină :  $\cos \theta = \frac{1}{2}$ ;  $\sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ . Coordonatele centrului de greutate al plăcii  $C(x_c, y_c)$  se determină cu ajutorul relațiilor:

$$x_c = \frac{A_1 x_{c1} - A_2 x_{c2}}{A_1 - A_2}; \quad y_c = \frac{A_1 y_{c1} - A_2 y_{c2}}{A_1 - A_2}, \tag{d}$$

unde:

$$A_1 = 16a^2; \quad A_2 = \pi a^2 / 2; \tag{e}$$

$$x_{c1} = 11a / 3; \quad y_{c1} = 4a / 3; \quad x_{c2} = 4a; \quad y_{c2} = 4a / 3\pi$$

Înlocuind rezultă:

$$x_c = \frac{4(128 - 3\pi)}{3(32 - \pi)} a = 5,4785a; \quad y_c = \frac{124a}{3(32 - \pi)} = 1,4323a \tag{f}$$

Deci valorile reacțiunilor după înlocuirea parametrilor de mai sus sunt:

$$N_A = 0,216 G; \quad X_o = 0,974 G; \quad Y_o = 0,313 G \tag{g}$$

**4.2.5** Se consideră o placă triunghiulară omogenă de greutate  $G$ , situată într-un plan vertical, care se reazemă în  $A$  pe muchia unui perete vertical, iar în punctul  $O$  este legată de mediul fix printr-o articulație cilindrică (dimensiunile plăcii și distanța de la articulație la peretele vertical sunt date fig. 4.2.5.a). Legăturile din  $A$  și  $O$  sunt fără frecare. **Se cer** mărimile reacțiunilor din  $A$  și  $O$ .

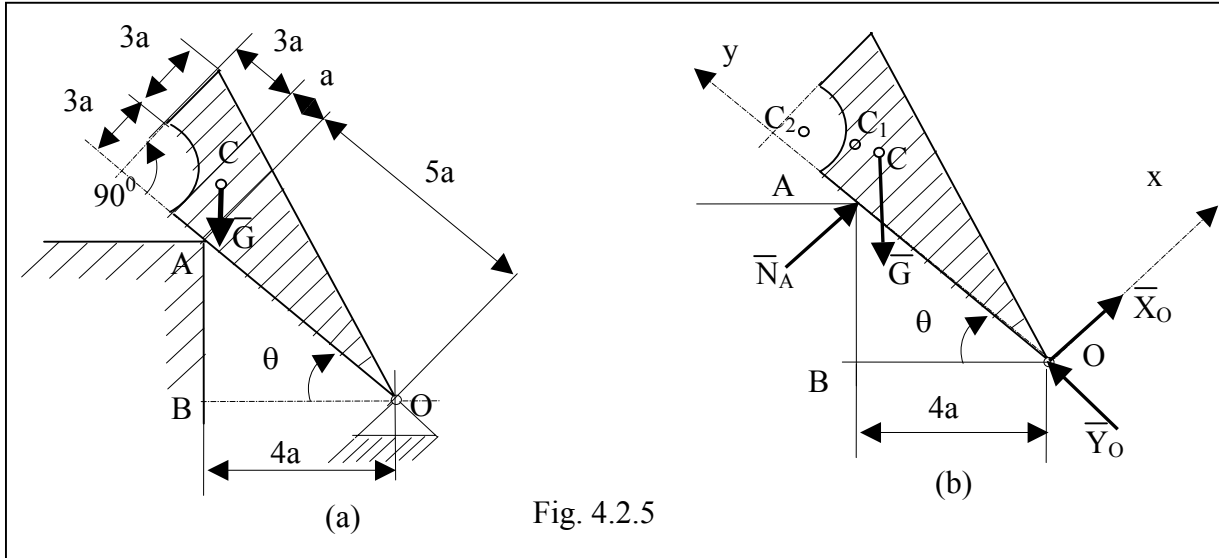


Fig. 4.2.5

**Rezolvare**

Se alege sistemul de referință Oxy convenabil și se introduc în  $A$  și  $O$  forțele de legătură  $\bar{N}_A$ ,  $\bar{X}_O$  și  $\bar{Y}_O$  (conform axiomei legăturilor, fig. 4.2.5.b). Ecuațiile de echilibru a forțelor /momentelor în proiecții pe cele trei axe sunt:

$$\begin{aligned} \sum X_i = 0 & \quad X_O - G \cos \theta + N_A = 0 \\ \sum Y_i = 0 & \quad Y_O - G \sin \theta = 0 \\ \sum M_{zO} = 0 & \quad N_A \cdot 5a + (G \sin \theta)x_C - (G \cos \theta)y_C = 0 \end{aligned} \tag{a}$$

Din a doua ecuație se obține :  $Y_O = G \sin \theta$  (b)

Din a treia ecuație se obține :

$$N_A = \left( \frac{y_C \cos \theta}{5a} - \frac{x_C \sin \theta}{5a} \right) G; \tag{c}$$

Înlocuind această valoare în prima ecuație rezultă:

$$X_O = \left( \cos \theta - \frac{y_C \cos \theta}{5a} + \frac{x_C \sin \theta}{5a} \right) G; \tag{d}$$

Din triunghiul OBA se determină valorile :  $\cos \theta = \frac{4}{5}$ ;  $\sin \theta = \frac{3}{5}$ . (e)

Poziția centrului de greutate al plăcii triunghiulare  $C(x_C, y_C)$  se determină cu ajutorul relațiilor:  $x_C = \frac{A_1 x_{c1} - A_2 x_{c2}}{A_1 - A_2}$ ;  $y_C = \frac{A_1 y_{c1} - A_2 y_{c2}}{A_1 - A_2}$ , (f)

unde:

$$A_1 = 27a^2; \quad A_2 = 9\pi a^2 / 4; \quad (g)$$

$$x_{C1} = 2a; \quad y_{C1} = 6a; \quad x_{C2} = 4a / \pi; \quad y_{C2} = 9a - 4a / \pi$$

Înlocuind rezultă:

$$x_c = \frac{20a}{12 - \pi} = 2,2577a; \quad y_c = \frac{76 - 9\pi}{12 - \pi} a = 5,3876a \quad (h)$$

Valorile reacțiunilor după înlocuirea parametrilor de mai sus sunt:

$$N_A = 0,591G; \quad X_o = 0,09G; \quad Y_o = 0,8G. \quad (i)$$

**4.2.6. Se consideră un cadru legat de mediul fix printr-o articulație cilindrică  $O$  și un reazem  $A$ , asupra căruia acționează un sistem de forțe, cupluri și sarcini distribuite uniforme ca în fig. 4.2.6.a. Se cunosc:  $a, q, \alpha, F=2aq, M=3a^2q$ .**

**Se cer mărimile reacțiunilor din reazemul  $A$  și articulația  $O$ .**

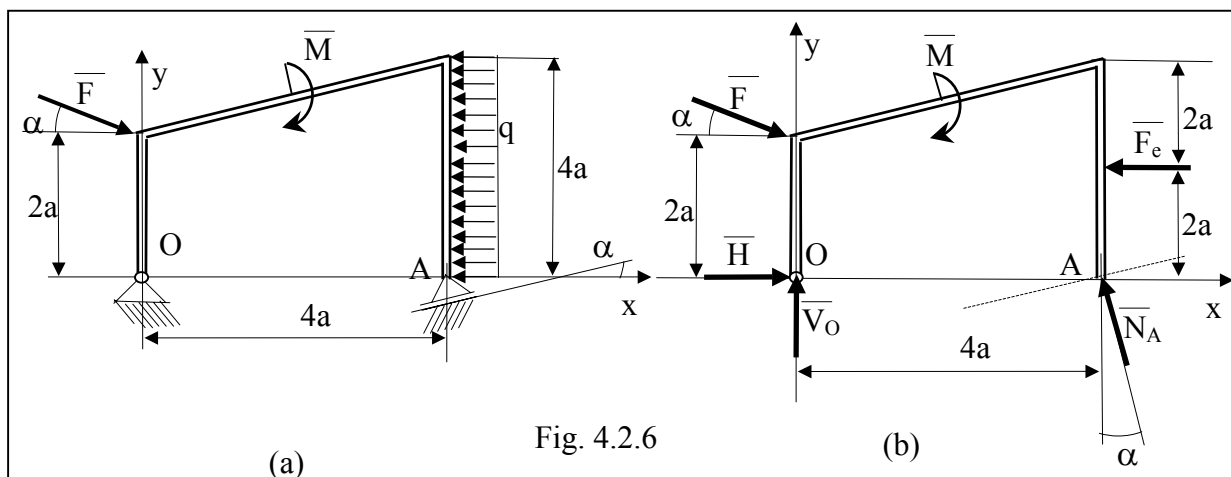


Fig. 4.2.6

**Rezolvare**

Se alege convenabil sistemul de referință  $Oxy$  și se introduc în  $A$  și  $O$  forțele de legătură  $\bar{N}_A$ ,  $\bar{H}_o$  și  $\bar{V}_o$  (conform axiomei legăturilor, fig. 4.2.6.b). Sarcina uniform distribuită  $q$  se înlocuiește cu o forță echivalentă concentrată  $\bar{F}_e$  ce acționează la mijlocul distanței pe care este sarcina distribuită:  $F_e=4aq$ .

Ecuatiile de echilibru a forțelor care acționează asupra barei, în proiecții pe cele trei axe se scriu:

$$\sum X_i = 0 \quad H_o + F \cos \alpha - F_e - N_A \sin \alpha = 0$$

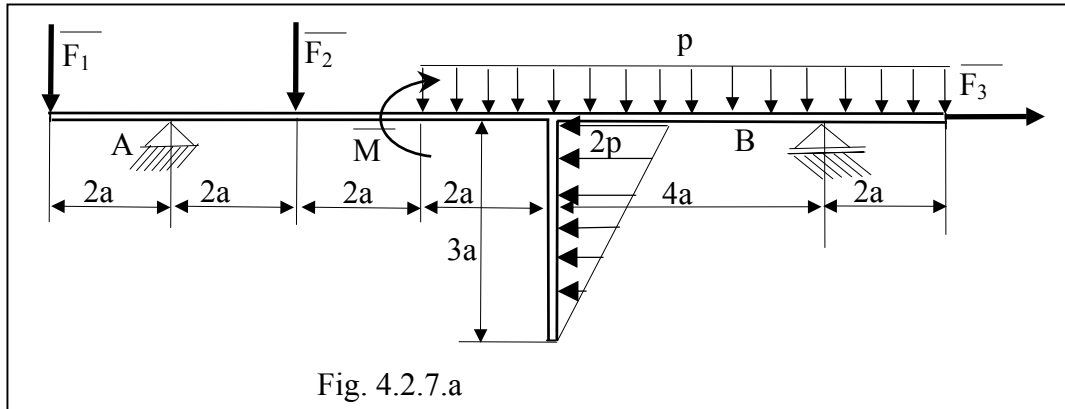
$$\sum Y_i = 0 \quad V_o - F \sin \alpha + N_A \cos \alpha = 0 \quad (a)$$

$$\sum M_{zo} = 0 \quad (N_A \cos \alpha) \cdot 4a + F_e \cdot 2a - (F \cos \theta) \cdot 2a - M = 0$$

Rezolvând acest sistem rezultă:

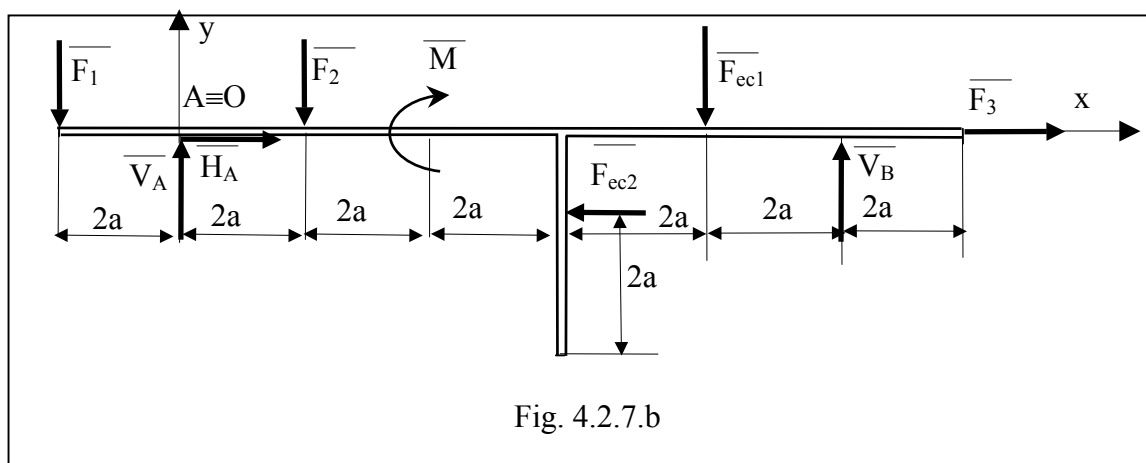
$$N_A = \frac{4 \cos \alpha - 5}{4 \cos \alpha} aq; \quad H_o = \left( \frac{11}{4} - \cos \alpha \right) aq; \quad V_o = \left( \frac{5}{4} + 2 \sin \alpha - \cos \alpha \right) aq \quad (b)$$

4.2.7 Se consideră un cadru plan legat la mediul fix printr-o articulație cilindrică A și un reazem B, asupra căruia acționează un sistem de forțe, cupluri și sarcini distribuite uniforme și triunghuilar, ca în fig. 4.2.7.a. Se cunosc:  $a, q, F_1=ap, F_2=4ap, F_3=ap, M=3a^2p$ . Se cer mărimile reacțiunilor din A și B.



**Rezolvare**

Se alege sistemul de referință Oxy cu originea în punctul A ( $O \equiv A$ , fig. 4.2.7.b). Se înlocuiesc legăturile A și B cu reacțiunile corespunzătoare  $V_A, H_A, V_B$  și sarcinile distribuite cu forțele echivalente corespunzătoare  $F_{ec1}$  și  $F_{ec2}$ .



Pentru determinarea reacțiunilor  $V_A, H_A, V_B$  se scriu :

➤ ecuația de echilibru a momentelor forțelor și cuplurilor:  $\Sigma M_O=0$

$$V_B \cdot 10a + F_1 \cdot 2a - F_2 \cdot 2a - M - F_{ec1} \cdot 8a - F_{ec2} \cdot a = 0 \tag{a}$$

➤ ecuația de echilibru a forțelor după direcția Ox:  $\Sigma X=0$

$$H_A + F_3 - F_{ec2} = 0 \tag{b}$$

➤ ecuația de echilibru a a forțelor după direcția Oy:  $\Sigma Y=0$

$$V_A + V_B - F_1 - F_2 - F_{ec1} = 0 \tag{c}$$

Se obțin următoarele rezultate:  $V_A=pa; H_A=5,4 pa; V_B=7,6 pa$  (d)

Generalizând rezolvarea pentru acest tip de problemă, pentru determinarea reacțiunilor  $V_A, H_A, V_B$  (având sensul axelor  $Ox$  și  $Oy$ ) se scriu: ecuația de echilibru a momentelor forțelor și cuplurilor ( $\Sigma M_O=0$ ) și două ecuații de echilibru a forțelor și sarcinilor distribuite ( $\Sigma X_i=0$  și  $\Sigma Y_i=0$ ). Se obține următorul sistem de 3 ecuații :

$$V_B x_B + \Sigma (x_i Y_i - y_i X_i) + M = 0; \quad H_A + X^e = 0; \quad V_A + V_B + Y^e = 0 \quad (e)$$

unde s-a notat :

- $X^e = \Sigma X_i, Y^e = \Sigma Y_i$ , suma proiecțiilor forțelor exterioare pe axa  $Ox$  și  $Oy$ ;
- $X_i, Y_i$ , proiecțiile forței exterioare  $\bar{F}_i$  pe axele  $Ox$  respectiv  $Oy$ ;
- $x_i, y_i$  coordonatele punctului de aplicație al forței  $\bar{F}_i$

Rezolvând acest sistem rezultă următoarele valori ale reacțiunilor:

$$V_B = - (\Sigma (x_i Y_i - y_i X_i) + M) / x_B; \quad H_A = - X; \quad V_A = - Y - V_B$$

Aceste relații au fost introduse în programul EXCEL obținându-se următoarele rezultate:

**ALGORITMUL DE CALCUL UTILIZAT PENTRU PROGRAMUL EXCEL ȘI REZULTATE OBȚINUTE PENTRU PROBLEMA 4.2.7**

**DATE DE INTRARE**

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
Nr.	$x_B/a$	$y_B/a$	$x_1/a$	$y_1/a$	$X_1/pa$	$Y_1/pa$	$x_2/a$	$y_2/a$	$X_2/pa$	$Y_2/pa$	$x_3/a$
0											
1	10	0	-2	0	0	-1	2	0	0	-4	12

L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	X
$y_3/a$	$X_3/pa$	$Y_3/pa$	$x_4/a$	$y_4/a$	$X_4/pa$	$Y_4/pa$	$x_5/a$	$y_5/a$	$X_5/pa$	$Y_5/pa$	$M/pa^2$
0	1	0	8	0	0	-8	6	-1	-3	0	-3

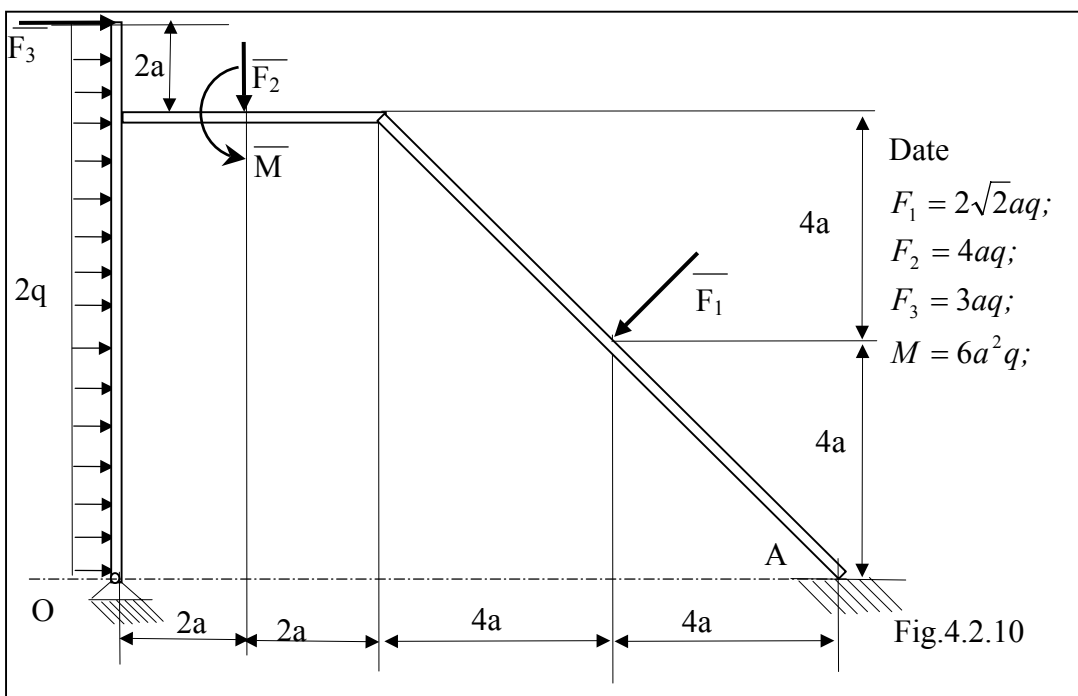
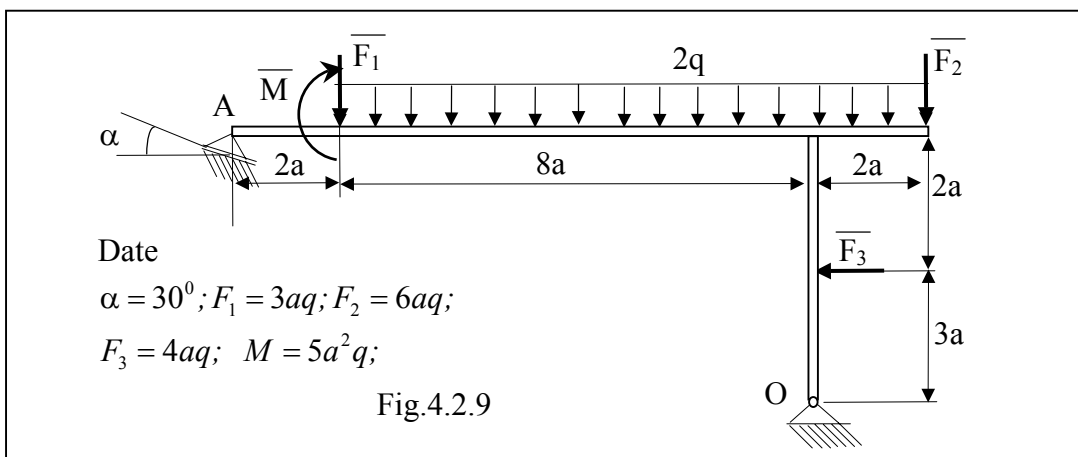
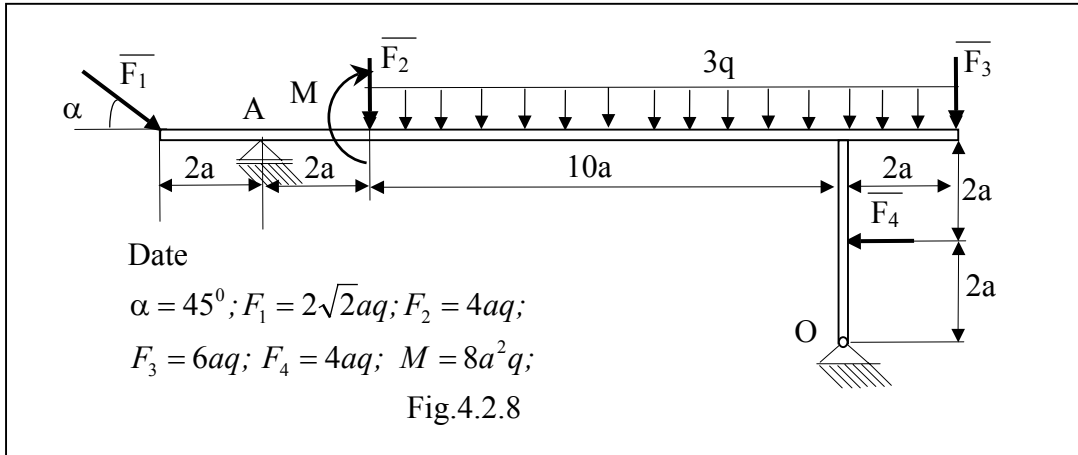
**DATE DE IESIRE**

Y	Z	AA	AB	AC	AD	AE
$\Sigma X_i/pa$	$\Sigma Y_i/pa$	$\Sigma X_i y_i / pa^2$	$\Sigma Y_i x_i / pa^2$	$V_B/pa$	$H_A/pa$	$V_A/pa$
$E1+I1+M1+Q1+U1$	$F1+J1+N1+R1+V1$	$E1*D1+I1*H1+M1*L1+Q1*P1+U1*T1$	$F1*C1+J1*G1+N1*K1+R1*O1+V1*S1$	$(AA1-AB1-X1)/A1$	-Y1	-AC1-Z1
-2	-13	3	-70	7,6	2	5,4

**PROBLEME PROPUSE**

*Se consideră un cadru plan legat de mediul fix printr-o articulație  $O$  și un reazem simplu  $A$ , asupra căruia acționează un sistem de forțe, cupluri și sarcini distribuite uniforme ca în figurile 4.2.8 ... 4.2.10. Se cunosc:  $a, q, \alpha, F_1... F_4, M$ .*

*Se cer mărimile reacțiunilor din reazemul  $A$  și articulația  $O$ .*



# CAPITOLUL V

## ECHILIBRUL SISTEMELOR DE CORPURI

### REZUMAT DE TEORIE

#### a. Teoremele generale ale echilibrului sistemelor de corpuri

Dacă un sistem de puncte materiale  $\{A_i\}_{i=1,2,\dots,n}$  interacționează mecanic (se atrag sau se resping) atunci acestea formează un *sistem mecanic de puncte materiale*. Forțele care acționează asupra sistemelor de puncte materiale se clasifică convențional în *forțe interioare* și *forțe exterioare*. *Forțele interioare* reprezintă interacțiunea mecanică dintre punctele sistemului și sunt egale ca mărime două câte două, au același suport și sunt dirijate în sens opus (conform principiului acțiunii și reacțiunii).

Un corp rigid poate fi considerat ca un sistem nedeformabil de puncte materiale (un sistem pentru care distanța dintre două puncte interioare oarecare ale sistemului rămâne tot timpul constantă).

Un sistem de corpuri rigide  $\{C_i\}_{i=1,2,\dots,m}$ ,  $m < n$ , poate fi considerat ca un sistem de puncte materiale format din subsisteme rigide sau nedeformabile (fiecare subsistem corespunde unuia dintre corpurile rigidului).

Forțele care acționează asupra sistemelor de corpuri pot fi forțe interioare (care exprimă interacțiunea dintre corpurile sistemului) și forțe exterioare (care exprimă interacțiunea cu alte corpuri din afara sistemului).

Forțele și cuplurile de legătură dintre corpurile sistemului și dintre corpurile sistemului și mediul exterior sunt necunoscute ale problemei de echilibru al sistemului de corpuri.

Pentru studiul echilibrului sistemelor de corpuri rigide se aplică cele trei teoreme (principii) cunoscute:

#### a. Teorema separării corpurilor

Dacă un sistem de corpuri (liber sau supus la legături) se află în echilibru, atunci fiecare corp al sistemului, considerat ca un subsistem rigid, se află de asemenea în echilibru.

Această teoremă se aplică începând cu izolarea fiecărui corp, înlocuirea legăturilor cu elemente mecanice corespunzătoare, (forțe, cupluri de legătură, numite și reacțiuni), continuând cu scrierea ecuațiilor de echilibru scalare (trei ecuații pentru corpuri în plan și șase ecuații pentru corpuri în spațiu) pentru fiecare corp al sistemului. La aceste ecuații se atașează și condițiile fizice corespunzătoare, privind tipul de legături cu frecare existente. Această metodă permite determinarea tuturor forțelor de legătură (interioare și exterioare).

**b. Teorema solidificării**

Dacă un sistem de corpuri rigide , liber sau supus la legături exterioare, se află în echilibru sub acțiunea unor forțe direct aplicate, el poate fi considerat ca un sistem rigid (sistem nedeformabil) de corpuri, păstrându-se legăturile exterioare inițiale. Teorema solidificării se poate enunța astfel: *Condiția necesară (dar nu și suficientă) ca un sistem de corpuri să fie în echilibru, este ca torsiunea forțelor exterioare (active și de legătură) să fie nul.*

Această metodă se aplică singură atunci când numărul de necunoscute ale legăturilor exterioare nu depășesc numărul de ecuații independente (trei ecuații în plan și șase ecuații în spațiu). Dacă apar mai multe necunoscute, atunci se aplică teorema echilibrului părților.

**c. Teorema echilibrului părților**

Dacă un sistem de corpuri rigide este în echilibru, atunci o parte oarecare din sistem , considerată ca rigid (subsistem nedeformabil), este de asemenea în echilibru sub acțiunea forțelor exterioare și interioare corespunzătoare subsistemului.

**5.1. ECHILIBRUL SISTEMELOR FORMATE DIN BARE RIGIDE ARTICULATE (CADRE PLANE)**

**5.1.1** *Se consideră sistemul format din două cadre plane articulate în punctul C ca în fig. 5.1.1. Se cunosc:  $a, q, \alpha$  ,  $F_1 = 3aq$  ,  $F_2 = 5aq$  ,  $F_3 = aq$  ,  $F_4 = 2aq$  ,  $M = 4a^2q$ . Se cer forțele de legătură din reazemul A, articulația  $O_1$  și încastrarea  $O_2$*

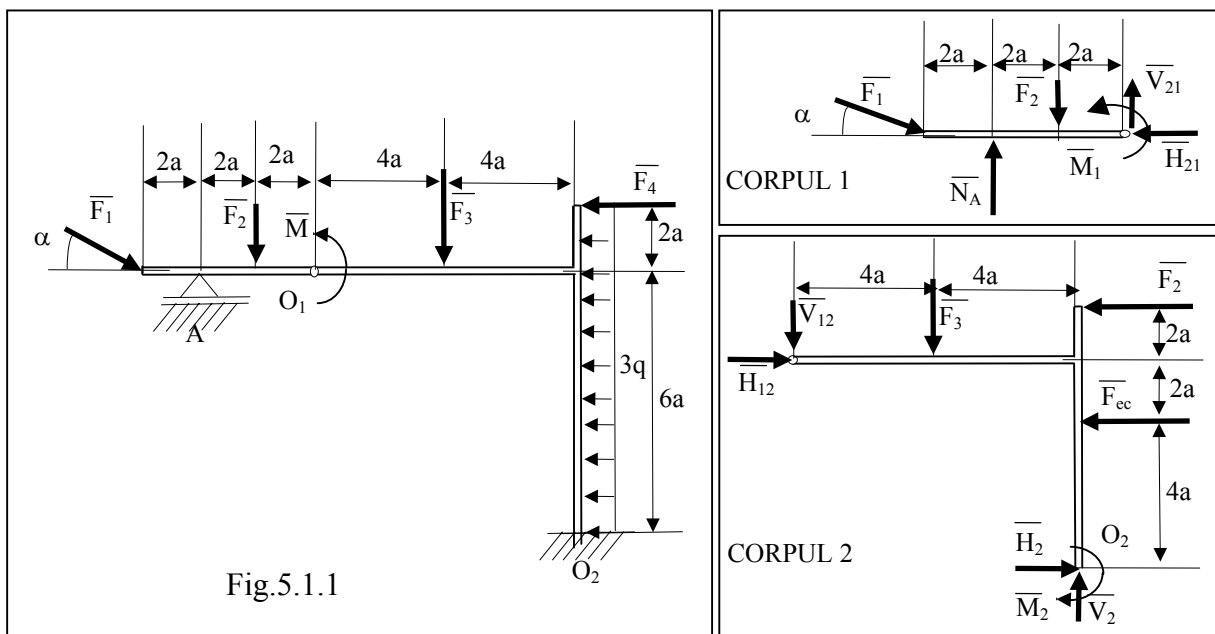


Fig.5.1.1

**Rezolvare:**

Se separă cele două cadre și se înlocuiesc legăturile cu forțe de legătură; se ține seama că:  $H_{21}=H_{12}=H_1$ ;  $V_{21}=V_{12}=V_1$  (conform principiului al treilea al



Mecanicii); se înlocuiește forța uniform distribuită cu o forță concentrată:  $F_{ec} = 24aq$  și se scriu ecuațiile de echilibru pentru fiecare cadru:

$$\text{Cadrul 1: } \begin{cases} \Sigma X_i = 0 & 3aq \cos \alpha - H_1 = 0 \\ \Sigma Y_i = 0 & V_1 + N_A - 5aq - 3aq \sin \alpha = 0 \\ \Sigma M_{O_1} = 0 & N_A \cdot 4a - (3aq \sin \alpha) \cdot 6a - 5aq \cdot 2a - 4a^2q = 0 \end{cases} \quad (a)$$

$$\Rightarrow H_1 = 3aq \cos \alpha, N_A = \frac{aq}{2}(9 \sin \alpha + 7), V_1 = \frac{3aq}{2}(1 - \sin \alpha) \quad (b)$$

Cadrul2:

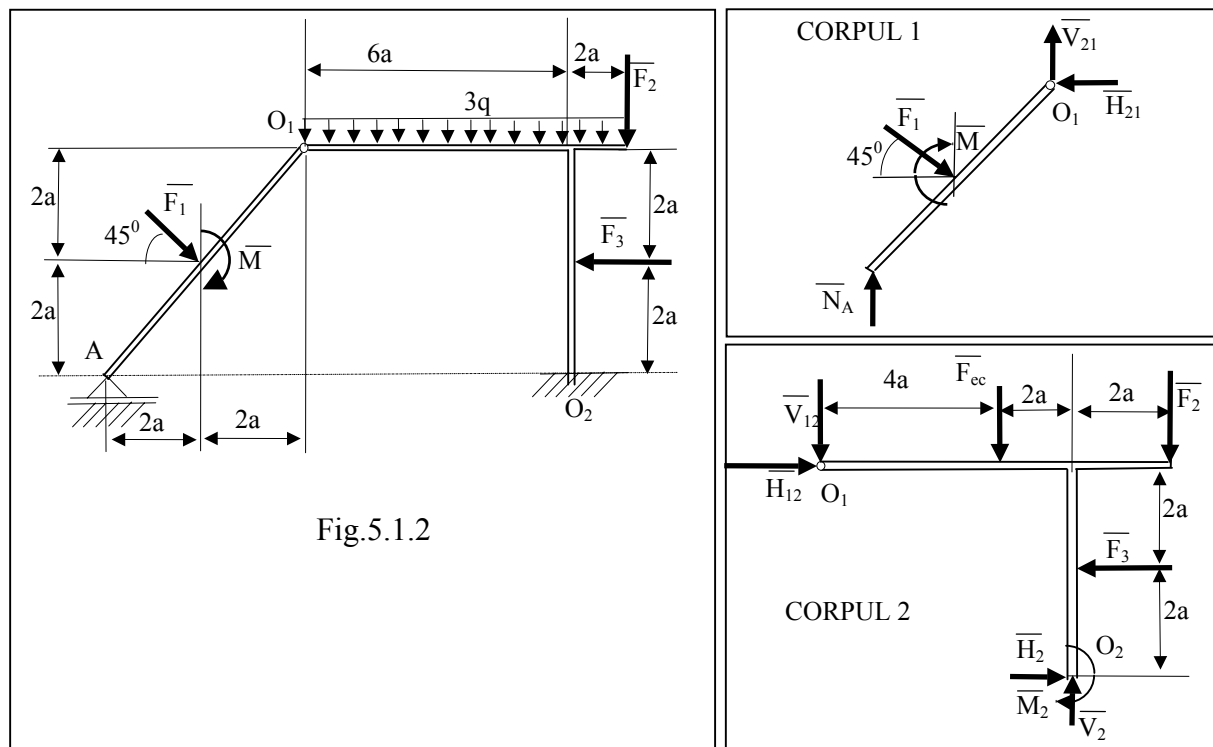
$$\begin{cases} \Sigma X_i = 0: & H_1 - 2aq - 24aq + H_2 = 0 \\ \Sigma Y_i = 0; & -V_1 - aq + V_2 = 0 \\ \Sigma M_{O_2} = 0; & M_2 - 24aq \cdot 4a - 2aq \cdot 8a - aq \cdot 4a - V_1 \cdot 8a + H_1 \cdot 6a = 0 \end{cases} \quad (c)$$

$$H_2 = aq(26 - 3 \cos \alpha), V_2 = \frac{aq}{2}(5 - 3 \sin \alpha), M_2 = 2a^2q(64 - 6 \sin \alpha - 9 \cos \alpha) \quad (d)$$

**5.1.2. Se consideră sistemul format din două cadre plane articulate în punctul C ca în fig. 5.1.2. Se cunosc:**  $a, q, F_1 = 6\sqrt{2}aq, F_2 = 10aq, F_3 = 12aq, M = 2a^2q$ . **Se cer:** Forțele de legătură din: reazemul simplu A, articulația  $O_1$  și încastrarea  $O_2$ .

**Rezolvare:**

Se separă cele două cadre și se introduc forțele de legătură; se ține seama că:  $H_{21}=H_{12}=H_1; V_{21}=V_{12}=V_1$  și se înlocuiește forța uniform distribuită cu o forță concentrată  $F_{ec} = 24aq$ . Ecuațiile de echilibru pentru fiecare cadru se scriu:



Cadrul 1:

$$\begin{cases} \Sigma X_i = 0: -H_1 + 6aq = 0 \\ \Sigma Y_i = 0: N_A + V_1 - 6aq = 0 \\ \Sigma M_{01} = 0: N_A \cdot 4a + 2a^2q - 6aq \cdot 2a - 6aq \cdot 2a = 0 \end{cases} \quad (a)$$

$$\Rightarrow H_1 = 6aq, N_A = \frac{11}{2}aq, V_1 = \frac{qa}{2} \quad (b)$$

Cadrul 2:

$$\begin{cases} \Sigma X_1 = 0; H_1 + H_2 - 12aq = 0 \\ \Sigma Y_i = 0; -V_1 + V_2 - 24aq - 10aq = 0 \\ \Sigma M_{02} = 0; M_2 - 12aq \cdot 2a + 10aq \cdot 2a - 24aq \cdot 2a - V_1 \cdot 6a + H_1 \cdot 4a = 0 \end{cases} \quad (c)$$

$$\Rightarrow H_2 = 6aq, V_2 = \frac{69}{2}aq, M_2 = 31a^2q \quad (d)$$

**5.1.3. Se consideră** sistemul format din două cadre plane articulate între ele în punctul C și la mediul fix în punctele A și B, încărcat cu forțe concentrate, sarcini distribuite și cupluri ca în fig. 5.1.3. Se cunosc valorile lui a și p.

**Se cer** forțele de legătură din articulațiile A, B și C

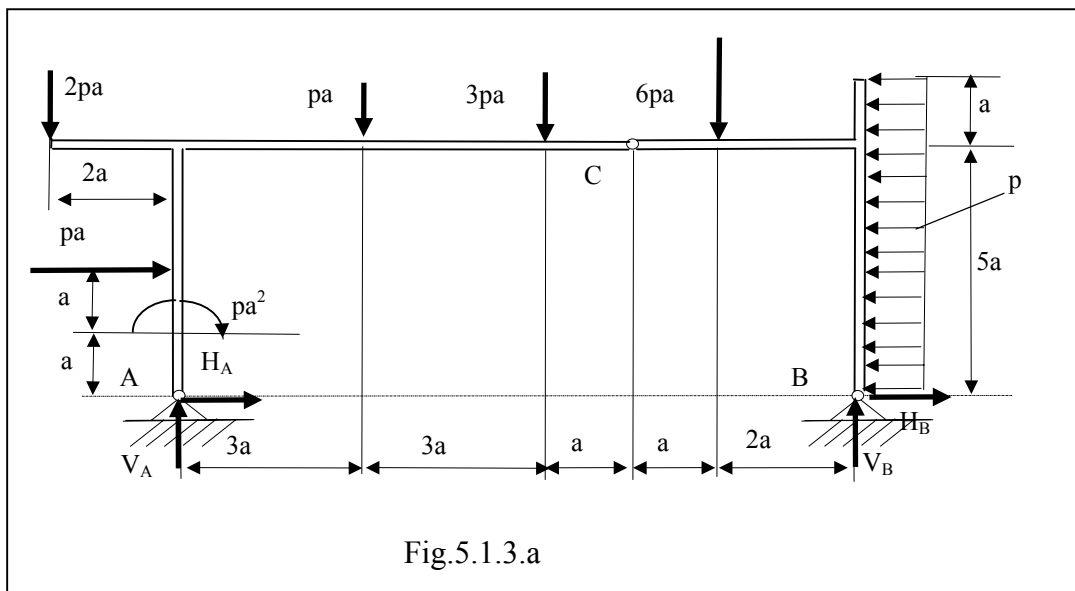


Fig.5.1.3.a

**Rezolvare:**

Necunoscutele  $V_A$  și  $V_B$  se determină prin aplicarea *teoremei solidificării* astfel: din ecuația de momente pentru întregul sistem față de punctul B, se determină  $V_A$  și din ecuația de momente față de punctul A, se determină  $V_B$ .

➤ din  $\Sigma M_{Bz}=0$  (pentru tot sistemul)  $\Rightarrow$

$$V_A \cdot 10a + pa^2 + pa \cdot 2a - 2pa \cdot 12a - pa \cdot 7a - 3pa \cdot 4a - 6pa \cdot 2a - 6pa \cdot 3a = 0 \quad (a)$$

$$\Rightarrow V_A = 7pa \quad (b)$$

➤ din  $\Sigma M_{Az}=0$  (pentru tot sistemul)  $\Rightarrow$

$$-V_B \cdot 10a + pa^2 + pa \cdot 2a - 2pa \cdot 2a + pa \cdot 3a + 3pa \cdot 6a + 6pa \cdot 8a - 6pa \cdot 3a = 0 \quad (c)$$

$$\Rightarrow V_B = 5pa \quad (d)$$

Necunoscutele  $H_A$  și  $H_B$  se determină prin aplicarea teoremei echilibrului părților, din ecuațiile de momente față de C scrise pentru fiecare cadru.

➤ Ecuațiile de echilibru pentru cadrul 1 :

$$\text{din } \Sigma M_C=0: \quad V_A \cdot 7a - H_A \cdot 5a + pa^2 - pa \cdot 3a - 2pa \cdot 9a - pa \cdot 4a - 3pa \cdot a = 0 \quad (e)$$

$$\Rightarrow H_A = 4,4pa \quad (f)$$

➤ Ecuațiile de echilibru pentru cadrul 2 :

$$\text{din } \Sigma M_C=0 \Rightarrow -V_B \cdot 3a - H_B \cdot 5a + 6pa \cdot a + 6pa \cdot 2a = 0 \quad (g)$$

$$\Rightarrow H_B = 0,6pa \quad (h)$$

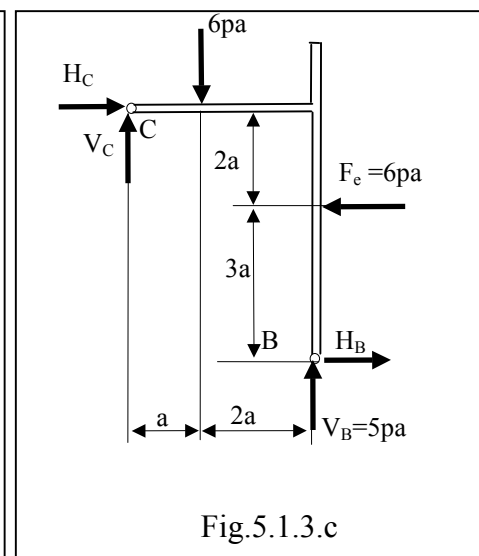
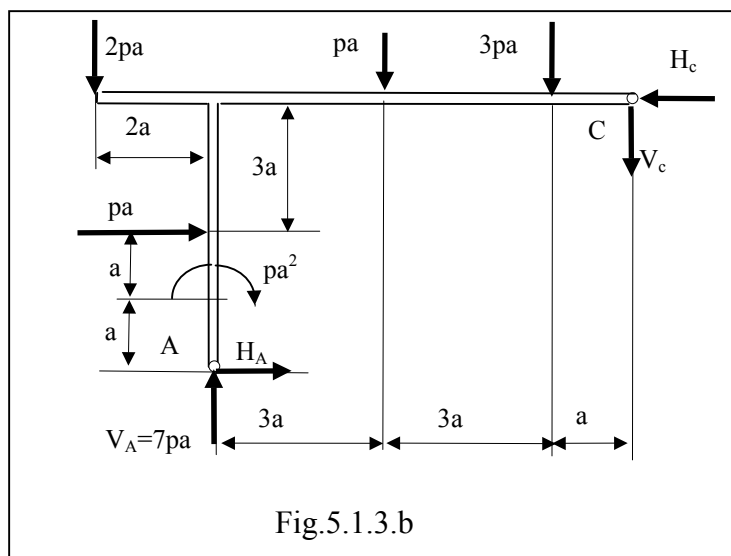
Necunoscutele  $H_C$  și  $V_C$  se determină prin aplicarea principiului echilibrului părților: din ecuațiile de proiecții pe orizontală și verticală pentru unul dintre cele două cadre (am folosit cadrul 2).

$$\text{din } \Sigma F_x=0 \Rightarrow -H_C - 6pa + H_B = 0 \quad (i)$$

$$\Rightarrow H_C = 5,4pa \quad (j)$$

$$\text{din } \Sigma F_y=0 \Rightarrow V_C + 5pa - 6pa = 0 \quad (k)$$

$$\Rightarrow V_C = 4pa \quad (l)$$



Ecuatiile de proiecții ale forțelor pentru întregul sistem și pentru cadrul 1 servesc la verificarea rezultatelor.

➤ Ecuatiile de verificare se pot scrie pentru întreg sistemul:

$$\Sigma F_x=0 \Rightarrow H_A + H_B + pa - 6pa = 0 \quad (m)$$

$$\Sigma F_y=0 \Rightarrow V_A + V_B - 2pa - pa - 3pa - 6pa = 0 \quad (n)$$

➤ Sau numai pentru cadrul 1:

$$\text{din } \Sigma F_x=0 \Rightarrow H_A - H_C + pa = 0 \quad (o)$$

$$\text{din } \Sigma F_y=0 \Rightarrow V_A - V_C - 2pa - pa - 3pa = 0 \quad (p)$$

Generalizând rezolvarea acestui tip de problemă, se alege sistemul de referință cu originea în punctul C ( $O \equiv C$ , articulația dintre cele două cadre).

Pentru determinarea reacțiunilor  $H_A, V_A, H_B, V_B$  se scriu cele două ecuații de momente ale forțelor pentru fiecare din cele două părți față de punctul C:  $\Sigma M_s=0$  și  $\Sigma M_d=0$  și cele două ecuații de proiecții ale forțelor pentru întreg sistemul  $\Sigma X_i=0$  și  $\Sigma Y_i=0$  obținându-se:

$$\begin{aligned} V_A x_A - H_A y_A + N_s &= 0; \\ V_B x_B - H_B y_B + N_d &= 0; \\ H_A + H_B + X &= 0; \\ V_A + V_B + Y &= 0 \end{aligned} \quad \text{unde am notat :} \quad (q)$$

- $N_s, N_d$  suma momentelor forțelor exterioare care acționează asupra părții din stânga/dreapta :  $N_s = \Sigma (x_i Y_{si} - y_i X_{si}) + M_{Is}$ ;  $N_d = \Sigma (x_i Y_{di} - y_i X_{di}) + M_{Id}$ ;
- $X, Y$  suma proiecțiilor forțelor exterioare pe axa  $Ox, Oy$ :  $X = \Sigma X_i$ ;  $Y = \Sigma Y_i$ ;
- $X_i, Y_i$  proiecțiile forței exterioare  $\bar{F}_i$  pe axele  $Ox$  respectiv  $Oy$

Rezolvând acest sistem rezultă următoarele valori ale reacțiunilor:

$$\begin{aligned} H_A &= (N_s x_B + N_d x_A + X x_A y_B - Y x_A x_B) / (x_B y_A - x_A y_B) \\ V_A &= (N_s y_B + N_d y_A + X y_A y_B - Y x_B y_A) / (x_B y_A - x_A y_B) \\ H_B &= (-N_s x_B - N_d x_A - X x_B y_A + Y x_A x_B) / (x_B y_A - x_A y_B) \\ V_B &= (-N_s y_B - N_d y_A - X y_A y_B + Y x_A y_B) / (x_B y_A - x_A y_B) \end{aligned} \quad (r)$$

Pentru calculul forțelor de legătură din articulația C se folosesc cele două ecuații de proiecții ale forțelor pentru partea dreaptă :

$$H_C + H_B + X_d = 0 \quad V_C + V_B + Y_d = 0 \quad \text{unde:}$$

- $X_d$  suma proiecțiilor forțelor exterioare din dreapta pe axa  $Ox$ :  $X_d = \Sigma X_{di}$ ;
- $Y_d$  suma proiecțiilor forțelor exterioare din dreapta pe axa  $Oy$ :  $Y_d = \Sigma Y_{di}$ ;

## ALGORITMUL DE CALCUL UTILIZAT PENTRU PROGRAMUL EXCEL

### DATE DE INTRARE

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q
$x_A/a$	$y_A/a$	$x_B/a$	$y_B/a$	$x_{1s}/a$	$y_{1s}/a$	$X_{1s}/pa$	$Y_{1s}/pa$	$x_{2s}/a$	$y_{2s}/a$	$X_{2s}/pa$	$Y_{2s}/pa$	$x_{3s}/a$	$y_{3s}/a$	$X_{3s}/pa$	$Y_{3s}/pa$	$M_{1s}/pa^2$
-6	-5	4	-5	-6	-3	3	0	-4	0	0	-8	0	0	0	0	-4

R	S	T	U	V	X	Y	Z	AA	AB	AC	AD	AE
$x_{1d}/a$	$y_{1d}/a$	$X_{1d}/pa$	$Y_{1d}/pa$	$x_{2d}/a$	$y_{2d}/a$	$X_{2d}/pa$	$Y_{2d}/pa$	$x_{3d}/a$	$y_{3d}/a$	$X_{3d}/pa$	$Y_{3d}/pa$	$M_{1d}/pa^2$
2	0	0	-4	4	-1	-2	0	0	0	0	0	0

### DATE DE IEȘIRE

AF	AG	AH	AI	AJ	AK
$X_s = \sum X_{is}/pa$	$Y_s = \sum Y_{is}/pa$	$X_d = \sum X_{id}/pa$	$Y_d = \sum Y_{id}/pa$	<b>X</b>	<b>Y</b>
G+K+O	H+L+P	T+Y+AC	U+Z+AD	AF+AH	AG+AI
3	-8	-2	-4	1	-12

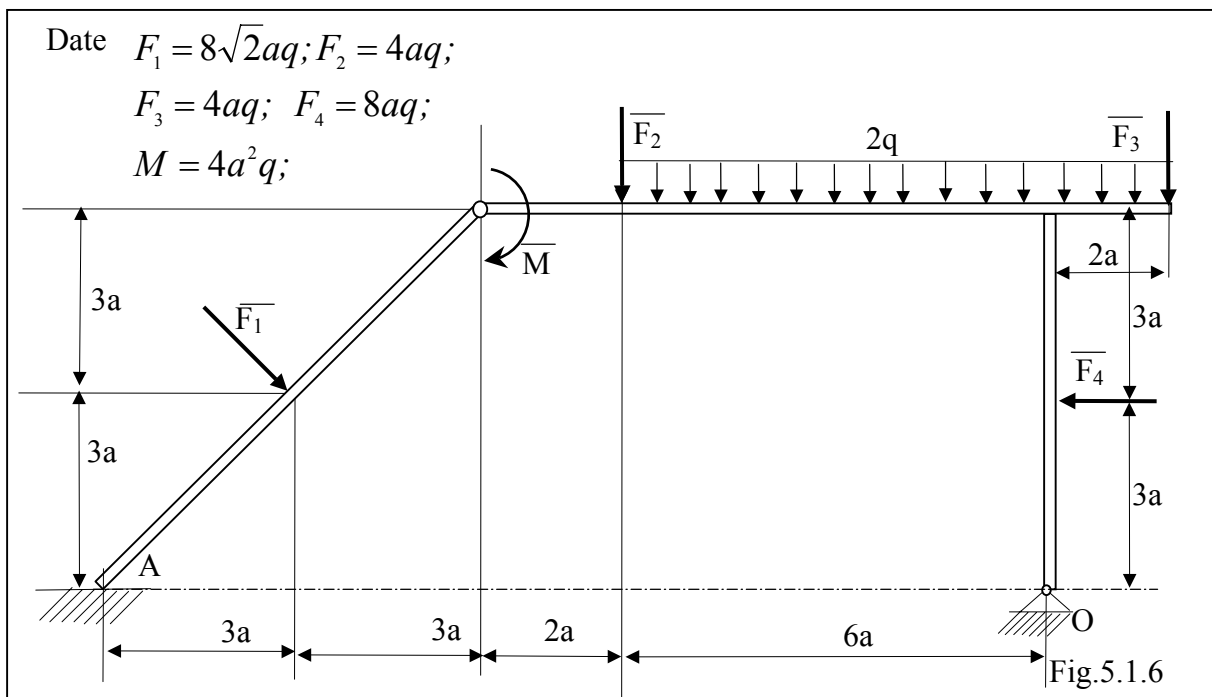
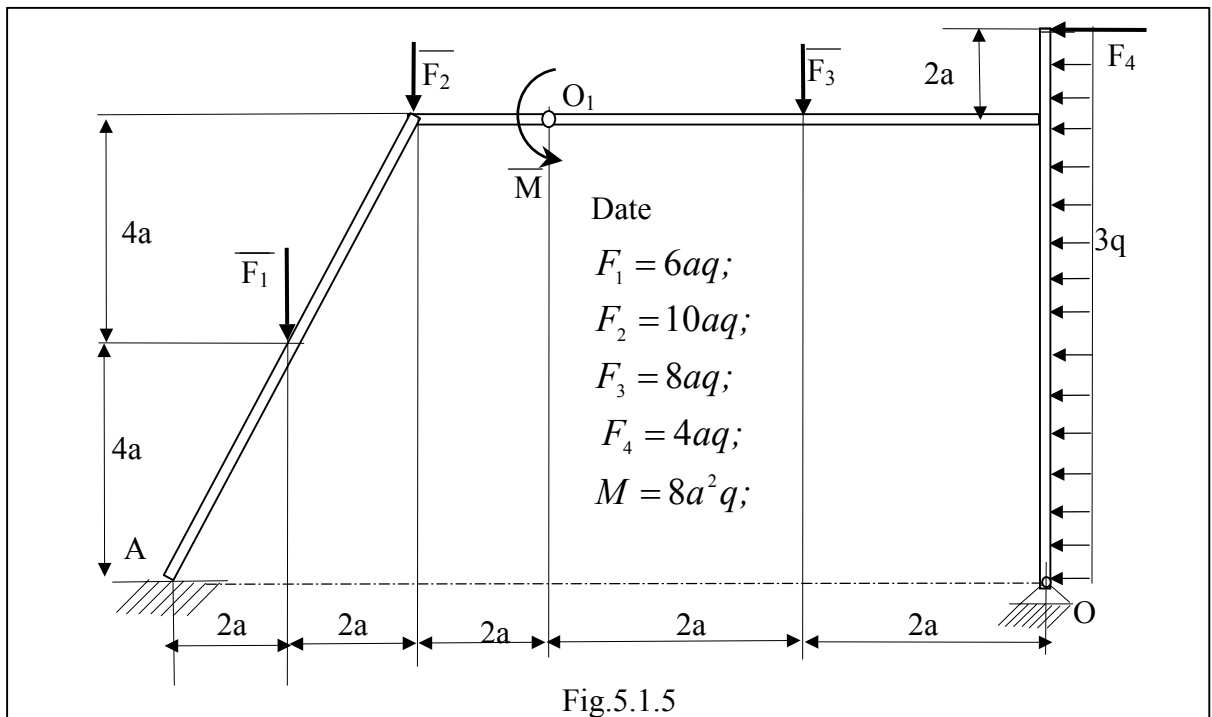
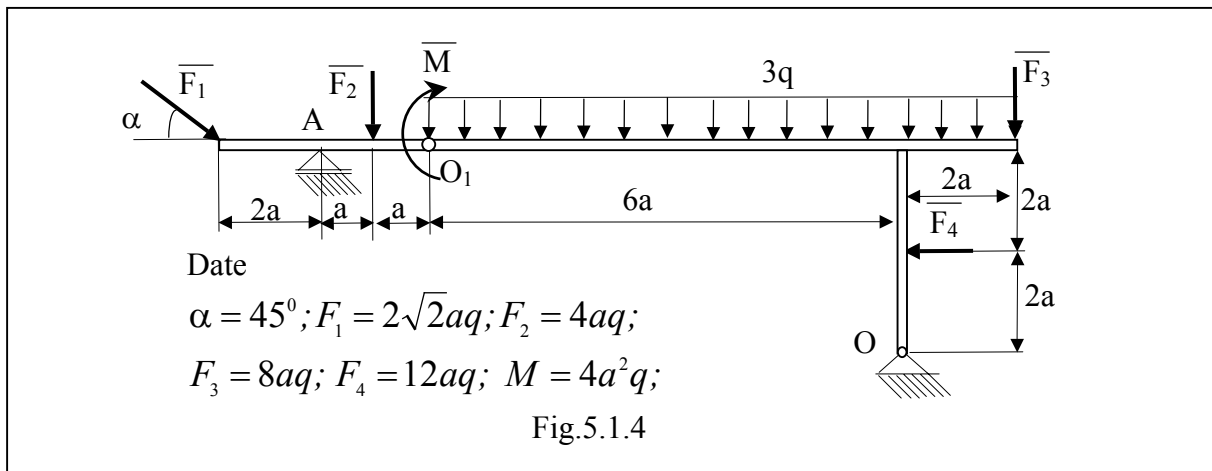
AL	AM	AN	AO	AP	AQ
$\sum X_{is}y_{is}/pa^2$	$\sum Y_{is}x_{is}/pa^2$	$\sum X_{id}y_{id}/pa^2$	$\sum Y_{id}x_{id}/pa^2$	<b>N<sub>s</sub></b>	<b>N<sub>d</sub></b>
F*G+J*K+N*O	E*H+I*L+M*P	S*T+X*Y+AB*AC	R*U+V*Z+AA*AD	AM - AL+Q	AO-AN+AE
-9	32	2	-8	37	-10

AR	AS	AT	AU	AV	AW
<b>H<sub>A</sub></b>	<b>V<sub>A</sub></b>	<b>H<sub>B</sub></b>	<b>V<sub>B</sub></b>	<b>H<sub>C</sub></b>	<b>V<sub>C</sub></b>
$(AP*C+AQ*A+AJ*A^*D) / (-AK*A*C)/(B*C-A*D)$	$(AP*D+AQ*B+AJ*B^*D) / -AK*B*C)/(B*C-A*D)$	$(-AP*C-AQ*A-AJ*B^*C) / -AK*A*C)/(B*C-A*D)$	$(-AP*D-AQ*B+AJ*B^*D) / -AK*A*D)/(B*C-A*D)$	-AT-AH	-AU-AI
1	7	-2	5	4	-1

### PROBLEME PROPUSE

*Se consideră sistemele formate din două cadre plane articulate în punctul C ca în fig. 5.1.4...5.1.5. Se cunosc: a, q, α, F<sub>1</sub>, F<sub>2</sub>, , F<sub>4</sub>, M.*

*Se cer forțele de legătură din reazemul simplu A, articulația O<sub>1</sub> și încastrarea O<sub>2</sub>*

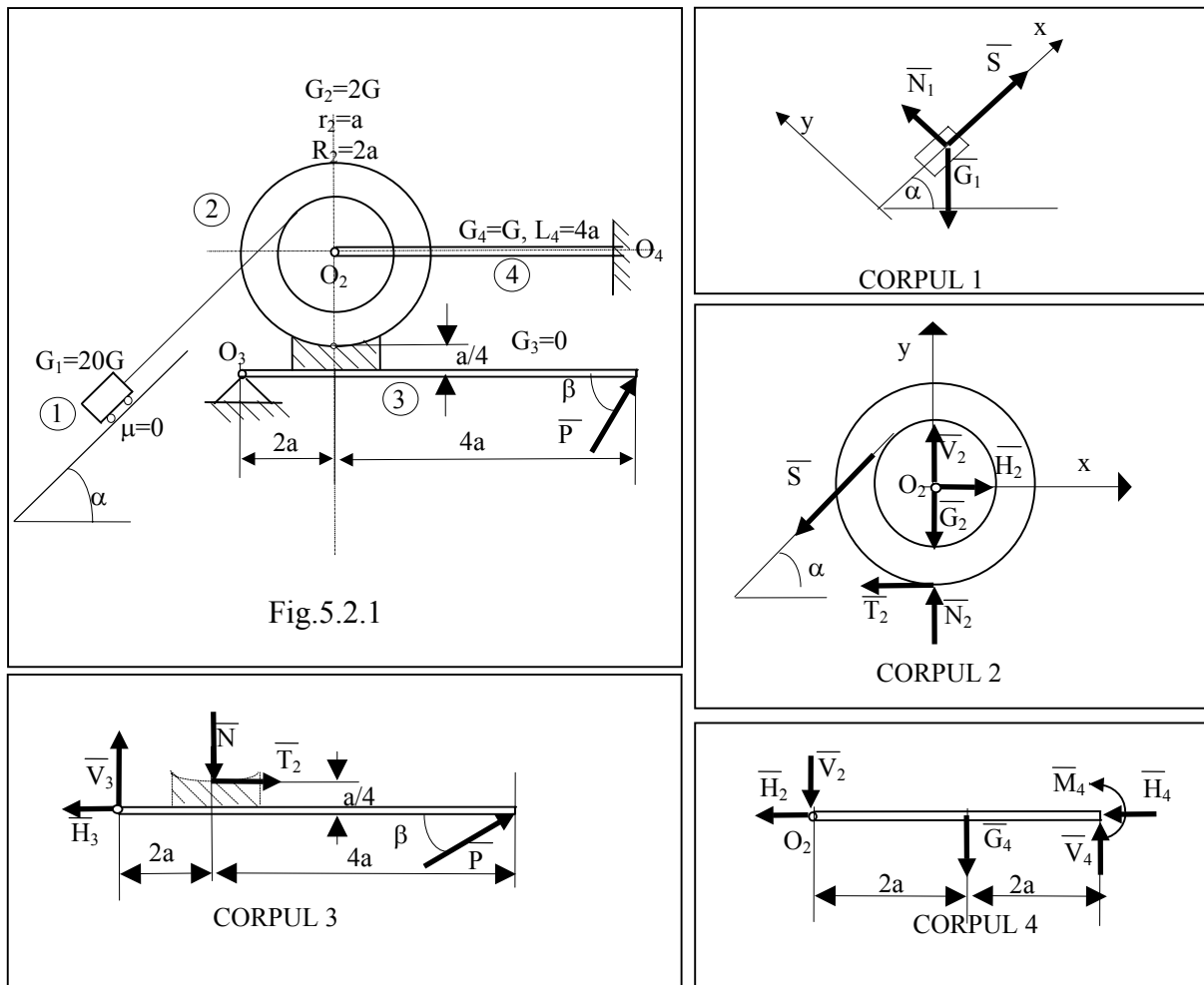


## S5.2. ECHILIBRUL SISTEMELOR PLANE DE CORPURI CU FRÂNE (SABOT, TAMPON SAU BANDĂ)

### PROBLEME REZOLVATE

5.2.1. Se consideră sistemul de frânare cu sabot, format din patru corpuri: (1), (2), (3), (4) (fig. 5.2.1) sunt cunoscute:  $a$ ,  $G$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\mu = 0$  pe planul înclinat,  $\mu \neq 0$  pe sabot, corpul (3) de greutate neglijabilă. Se cere:

- 1) Ecuațiile de echilibru pentru fiecare corp folosind metoda izolării.
- 2) Determinarea forței minime ( $P_{min}$ ) pentru repaus.
- 3) Determinarea forțelor de legătură.



#### Rezolvare:

- 1) Se separă corpurile și se înlocuiesc legăturile cu forțe de legătură, ca în figura 5.2.1.

Relațiile de echilibru pentru cele patru corpuri sunt următoarele:

$$\text{Corpul 1: } \begin{cases} \Sigma X_i = 0 \\ \Sigma Y_i = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} S - G_1 \sin \alpha = 0 \\ N_1 - G_1 \cos \alpha = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} S = 20G \sin \alpha \\ N_1 = 20G \cos \alpha \end{cases} \quad (\text{a})$$

$$\text{Corpul 2: } \begin{cases} \Sigma X_i = 0 \\ \Sigma Y_i = 0 \\ \Sigma M_{02} = 0 \\ \text{Conditia} \\ \text{fizica la limita} \\ \text{echilibrului} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H_2 - S \cos \alpha - T_2 = 0 \\ V_2 - S \sin \alpha - G_2 + N_2 = 0 \\ S \cdot a - T_2 \cdot 2a = 0 \Rightarrow T_2 = \frac{S}{2} = 10G \sin \alpha \\ T_2 = \mu N_2 \Rightarrow N_2 = \frac{T_2}{\mu} = \frac{10G \sin \alpha}{\mu} \end{cases} \quad (\text{b})$$

$$\text{Corpul 3: } \begin{cases} \Sigma X_i = 0 \\ \Sigma Y_i = 0 \\ \Sigma M_{03} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -H_3 + T_2 + P_m \cos \beta = 0 \\ V_3 - N_2 + P_m \sin \beta = 0 \\ (P_m \sin \beta) \cdot 6a - N_2 \cdot 2a - T_2 \cdot \frac{a}{4} = 0 \end{cases} \quad (\text{c})$$

$$\text{Corpul 4: } \begin{cases} \Sigma X_i = 0 \\ \Sigma Y_i = 0 \\ \Sigma M_{04} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -H_2 + H_4 = 0 \\ V_4 - V_2 - G_3 = 0 \\ M_4 - G_4 \cdot 2a - V_2 \cdot 4a = 0 \end{cases} \quad (\text{d})$$

Din ultima ecuație scrisă pentru corpul 3 avem:

$$P_m = \frac{1}{6 \sin \beta} \left( 2N_2 + \frac{T_2}{4} \right) = \frac{5G \sin \alpha}{12\mu \sin \beta} (8 + \mu) \quad (\text{e})$$

Înlocuind  $P_m$  și forțele de legătură găsite ( $S, T_2, N_2$ ) în celelalte ecuații, obținem forțele de legătură:  $H_2, V_2, H_3, V_3, H_4, V_4, M_4$ .

$$\begin{aligned} H_2 &= H_4 = 10G \sin \alpha (1 + 2 \cos \alpha) \\ V_2 &= V_4 = G \left( 20 \sin^2 \alpha + 2 + \frac{10 \sin \alpha}{\mu} \right) \\ H_3 &= 10G \sin \alpha + P_m \cos \beta \\ V_3 &= \frac{10G \sin \alpha}{\mu} - P_m \sin \beta \\ M_4 &= 2Ga \left( 40 \sin^2 \alpha + 5 + \frac{20 \sin \alpha}{\mu} \right) \end{aligned} \quad (\text{f})$$

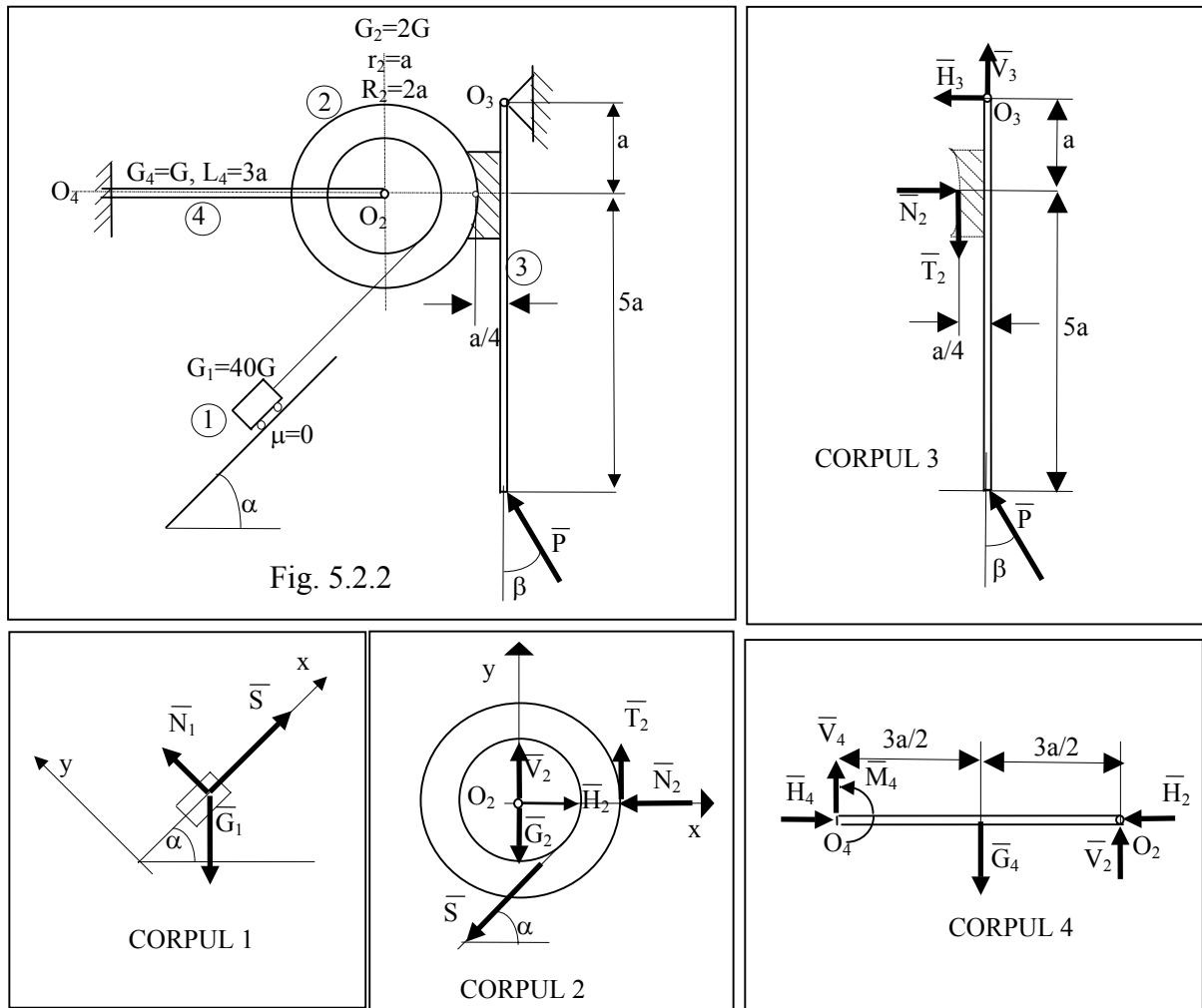


**5.2.2 Se consideră sistemul de frânare cu sabot format din patru corpuri, ca în fig.5.2.2, pentru care se cunosc  $a, G, \alpha, \beta$ . Se cer:**

- 1) scrierea relațiilor de echilibru pentru fiecare corp (după separarea lor)
- 2) Determinarea forței minime de frânare ( $P_{min}$ ).
- 3) Determinarea forțelor de legătură.

**Rezolvare:**

1) Se separă corpurile și se înlocuiesc legăturile cu forțe.



Ecuatiile de echilibru pentru fiecare corp sunt:

$$\text{Corpul 1: } \begin{cases} \sum X_i = 0 \\ \sum Y_i = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} S_1 - G_1 \sin \alpha = 0 \\ N_1 - G_1 \cos \alpha = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} S = 40G \sin \alpha \\ N_1 = 40G \cos \alpha \end{cases} \quad (a)$$

$$\text{Corpul 2: } \begin{cases} \sum X_i = 0 \\ \sum Y_i = 0 \\ \sum M_{O_2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H_2 - S \cos \alpha - N_2 = 0 \\ V_2 - S \sin \alpha - G_2 + T_2 = 0 \\ S \cdot a - T_2 \cdot 2a = 0 \Rightarrow T_2 = \frac{S}{2} = 20G \sin \alpha \end{cases} \quad (b)$$

$$T_2 = \mu N_2 (\text{la limita}) \Rightarrow N_2 = \frac{T_2}{\mu} = \frac{20G \sin \alpha}{\mu}$$

$$\text{Corpul 3: } \begin{cases} \Sigma X_i = 0 \\ \Sigma Y_i = 0 \\ \Sigma M_{O_3} = 0 \end{cases} \begin{cases} V_3 - T_2 + P_m \cos \beta = 0 \\ -H_3 + N_2 - P_m \sin \beta = 0 \\ (P_m \sin \beta) \cdot 5a - N_2 \cdot a - T_2 \frac{a}{4} = 0 \end{cases} \quad (c)$$

$$\text{Corpul 4: } \begin{cases} \Sigma X_i = 0 \\ \Sigma Y_i = 0 \\ \Sigma M_{O_4} = 0 \end{cases} \begin{cases} H_4 - H_2 = 0 \\ V_4 - G_4 - V_2 = 0 \\ M_4 - G_4 \cdot \frac{3a}{2} - V_2 \cdot 3a = 0 \end{cases} \quad (d)$$

Din ultima ecuație scrisă pentru corpul 3 rezultă:

$$P_m = \frac{G \sin \alpha}{\mu \sin \beta} (4 + \mu) \quad (e)$$

Înlocuind rezultatele ( $S$ ,  $T_2$ ,  $N_2$ ,  $P_m$ ) în celelalte ecuații, rezultă:

$$H_2 = H_4 = 20G \sin \alpha \left( 2 \cos \alpha - \frac{1}{\mu} \right) \quad H_3 = \frac{G \sin \alpha}{\mu} (16 - \mu) \quad (f)$$

$$V_2 = 2G(20 \sin^2 \alpha - 10 \sin \alpha + 1) \quad V_3 = G \sin \alpha \left( \frac{4 + \mu}{\mu} \operatorname{ctg} \beta - 20 \right)$$

$$V_4 = G(40 \sin^2 \alpha - 20 \sin \alpha + 3) \quad M_4 = \frac{3aG}{2} (-80 \sin^2 \alpha + 40 \sin \alpha - 3)$$

**5.2.5 Se consideră sistemul de frânare cu bandă din fig. 5.2.5**

Se cunosc valorile pentru:  $G$ ,  $a$ ,  $b$ ,  $r$ ,  $R$  și  $\mu$  – coeficientul de frecare a curelei pe disc; se neglijează greutatea discului 1 și ale pârghiei 2.

Se cere valoarea forței minime  $F_{min}$  pentru frânare.

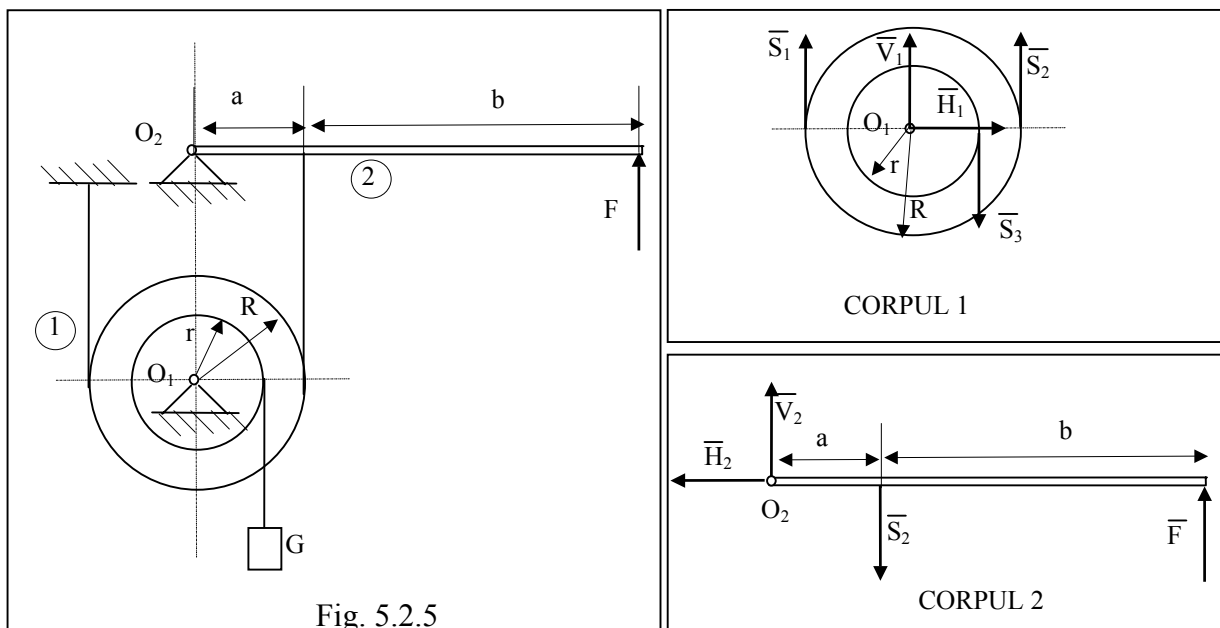


Fig. 5.2.5

**Rezolvare:**

Se separă corpurile și se înlocuiesc legăturile cu forțe de legătură, apoi se scriu ecuațiile de echilibru (ținând seama că tensiunea din fir  $S_3 = G$ ):

Corpul 1:  $\Sigma M_{O_1} = 0 \Rightarrow T_2 \cdot R + G \cdot r - S_1 \cdot R = 0$  (a)

Legea fizică a frecării (relația Euler)  $S_2 \leq S_1 e^{\mu\pi}$  (b)

Corpul 2:  $\Sigma M_{O_2} = 0 \Rightarrow F(a + b) - S_2 \cdot a = 0$  (c)

Înlocuind pe  $S_2$  din (c) în relațiile (a) și (b) și apoi pe  $S_1$  în (a) se obține:

$$S_2 = \frac{a + b}{a} F \tag{d}$$

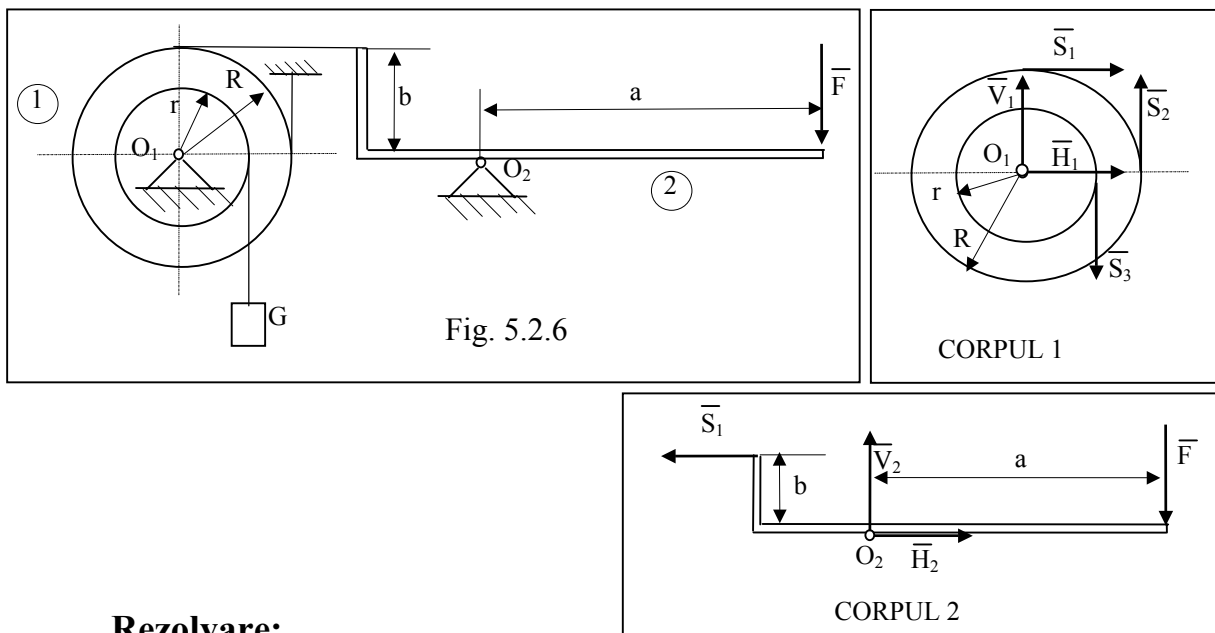
respectiv:

$$F \geq \frac{a}{a + b} \cdot \frac{r}{R} \cdot \frac{e^{\mu\pi}}{e^{\mu\pi} - 1} G \tag{e}$$

$$F_{min} = \frac{a}{a + b} \cdot \frac{r}{R} \cdot \frac{e^{\mu\pi}}{e^{\mu\pi} - 1} G$$

**5.2.6. Se consideră sistemul de frânare cu bandă (varianta b) din fig. 5.2.6. Se cunosc:  $G, a, b, r, R$  și  $\mu$  – coeficientul de frecare al curelei pe disc. Se neglijează greutatea discului și ale pârgheii.**

**Se cere valoarea forței minime  $F_{min}$  pentru frânare.**



**Rezolvare:**

Se separă corpurile și se înlocuiesc legăturile cu forțe de legătură, apoi se scriu ecuațiile de echilibru (ținând seama că tensiunea din fir  $S_3 = G$ ):

$$\Sigma M_{O_1} = 0 \Rightarrow S_1 \cdot R + G \cdot r - S_2 \cdot R = 0$$
 Corpul 1: (a)  
*(Relatia lui Euler)* 
$$\Rightarrow S_2 \leq S_1 e^{\frac{3\pi}{4}\mu}$$

Corpul 2: 
$$\Sigma M_{O_2} = 0 \Rightarrow S_1 \cdot b - F \cdot a = 0$$
 (b)

Înlocuind în prima și a doua ecuație  $S_1$  determinat din a treia, se obține:

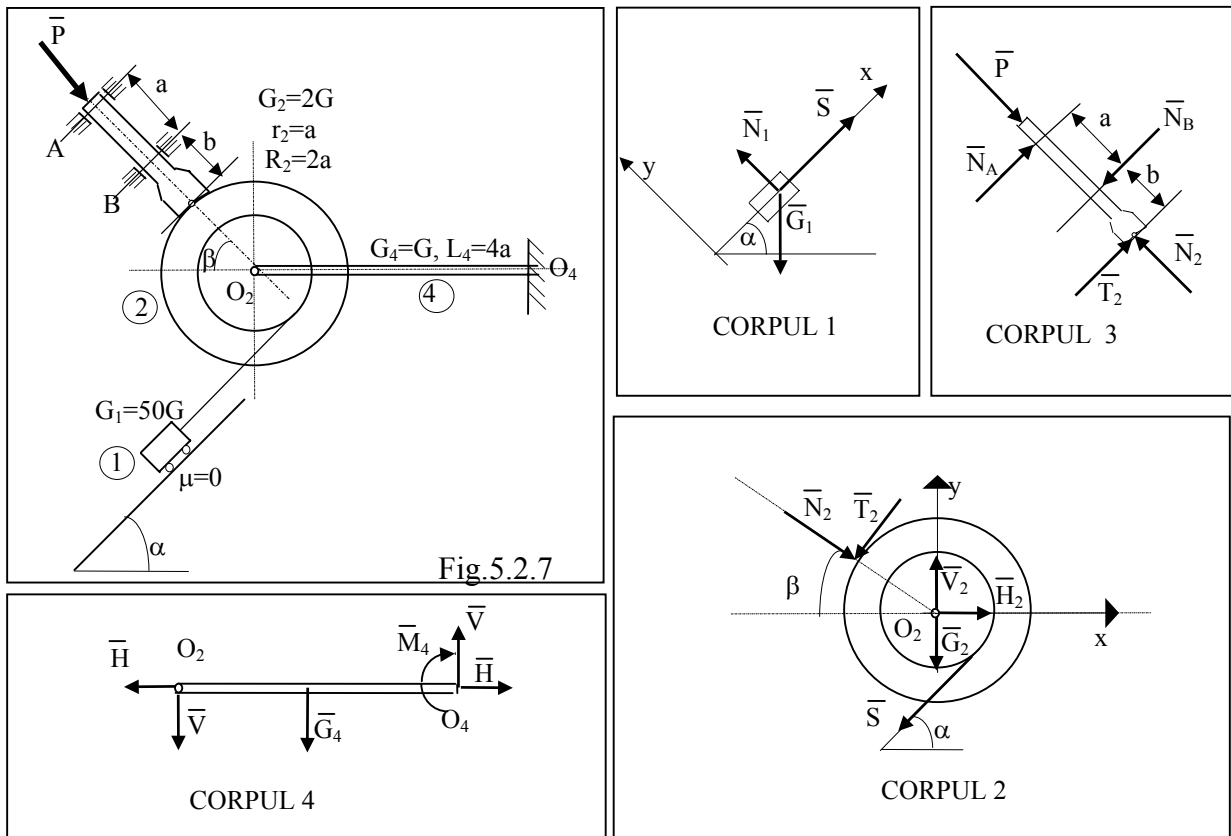
$$\begin{cases} \frac{a}{b} F \cdot R + G \cdot r - S_2 \cdot R = 0 \Rightarrow S_2 = \frac{a}{b} F + \frac{r}{R} G \\ S_2 \leq \frac{a}{b} F \cdot e^{\frac{3\pi}{4}\mu} \end{cases} \quad (c)$$

Înlocuind se obține:

$$F \geq \frac{r}{R} \cdot \frac{b}{a} \cdot \frac{G}{e^{\frac{3\pi}{4}\mu} - 1} \quad \text{sau:} \quad F_{min} = \frac{rb}{Ra} \cdot \frac{G}{e^{\frac{3\pi}{4}\mu} - 1} \quad (d)$$

**5.2.7. Se consideră frâna cu tampon din fig. 5.2.7 . Se cunosc valorile pentru:  $G, a, \alpha, \beta, b$  și coeficientul de frecare  $\mu$  pe tampon. Se cere:**

- 1) Să se separe corpurile și să se scrie ecuațiile de echilibru;
- 2) Să se determine forța minimă  $P_{min}$  pentru frânare.



**Rezolvare:**

Ecuțiile de echilibru pentru fiecare din cele patru corpuri izolate, sunt:

$$\text{Corpul 1: } \begin{cases} -G_1 \sin \alpha + S = 0 \\ -G_1 \cos \alpha + N_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} S = 50G \sin \alpha \\ N_1 = 50G \cos \alpha \end{cases} \quad (\text{a})$$

$$\text{Corpul 2: } \begin{cases} \Sigma X_i = 0 \Rightarrow H_2 - S \cos \alpha - T_2 \sin \beta + N_2 \cos \beta = 0 \\ \Sigma Y_i = 0 \Rightarrow V_2 - G_2 - S \sin \alpha - T_2 \cos \beta - N_2 \sin \beta = 0 \\ \Sigma M_{02} = 0 \Rightarrow T_2 \cdot 2a - S \cdot a = 0 \Rightarrow T_2 = \frac{S}{2} = 25G \sin \alpha \\ T_2 = \mu N_2 (\text{la limita}) \Rightarrow N_2 = \frac{T_2}{\mu} = \frac{25G \sin \alpha}{\mu} \end{cases} \quad (\text{b})$$

$$\text{Corpul 3: } \begin{cases} \Sigma X_i = 0 \Rightarrow P_m - N_2 = 0 \Rightarrow P_m = N_2 = \frac{25G \sin \alpha}{\mu} \\ \Sigma Y_i = 0 \Rightarrow N_A - N_B + T_2 = 0 \\ \Sigma M_A = 0 \Rightarrow T_2 \cdot (a + b) - N_B \cdot a = 0 \Rightarrow N_B = \frac{25G \sin \alpha (a + b)}{a} \end{cases} \quad (\text{c})$$

$$\text{Corpul 4: } \begin{cases} \Sigma X_i = 0 \Rightarrow -H_2 + H_4 = 0 \\ \Sigma Y_i = 0 \Rightarrow -V_2 - G_4 + V_4 = 0 \\ \Sigma M_{04} = 0 \Rightarrow M_4 - G_4 \cdot 2a - V_2 \cdot 4a = 0 \end{cases} \quad (\text{d})$$

Înlocuind mărimile găsite ( $S, T_2, P_m, N_B$ ) în ecuațiile nefolosite se obțin celelalte forțe de legătură ( $H_2, V_2, N_A, H_4, V_4, M_4$ ).

$$H_2 = 25G \left( \sin 2\alpha + \sin \beta \cos \alpha - \frac{\sin \alpha \cos \beta}{\mu} \right)$$

$$V_2 = 2G + 25G \left[ 2 \sin^2 \alpha + \left( 1 + \frac{1}{\mu} \right) \sin \alpha \sin \beta \right] \quad (\text{e})$$

$$N_A = \frac{25bG \sin \alpha}{a}$$

$$H_4 = 25G \left( \sin 2\alpha + \sin \beta \cos \alpha - \frac{\sin \alpha \cos \beta}{\mu} \right)$$

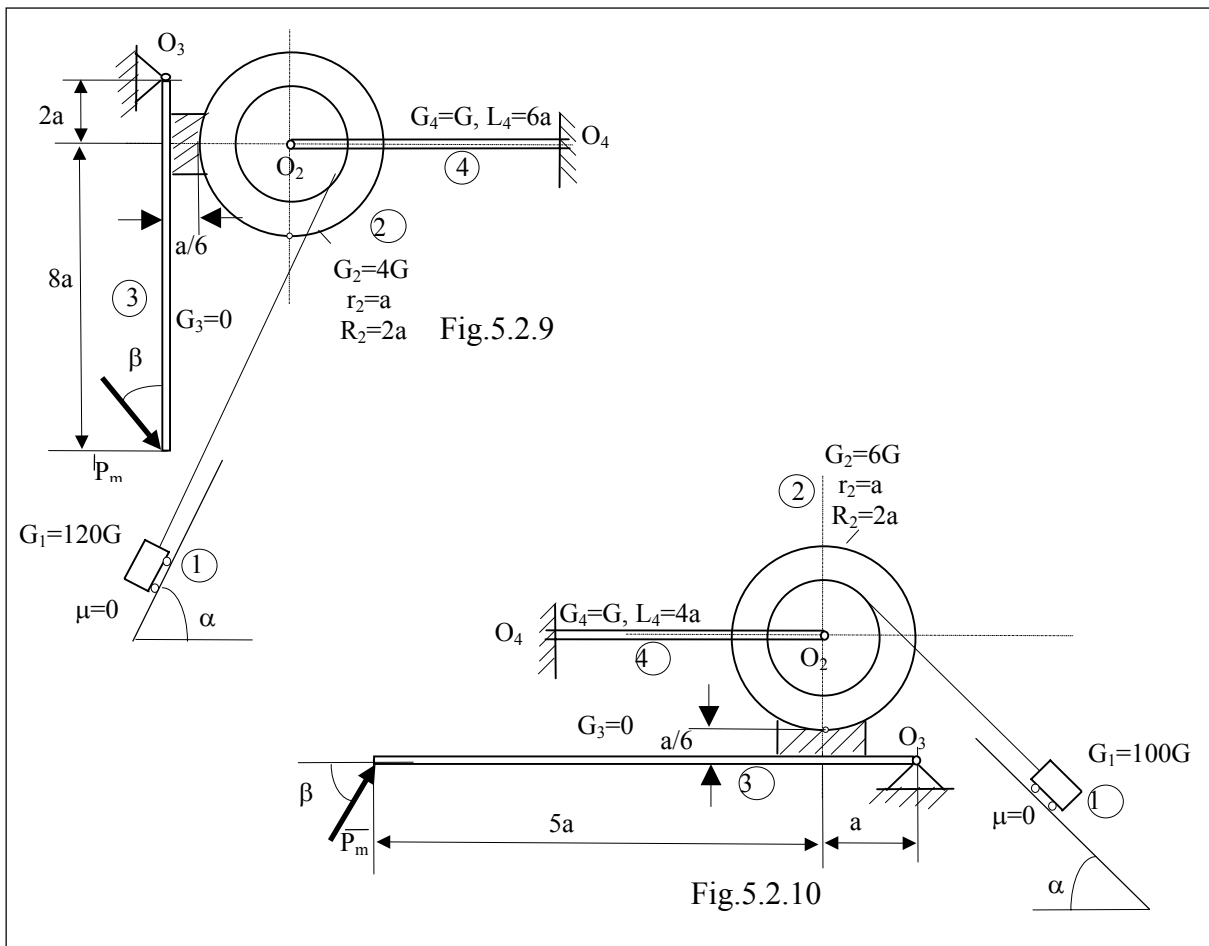
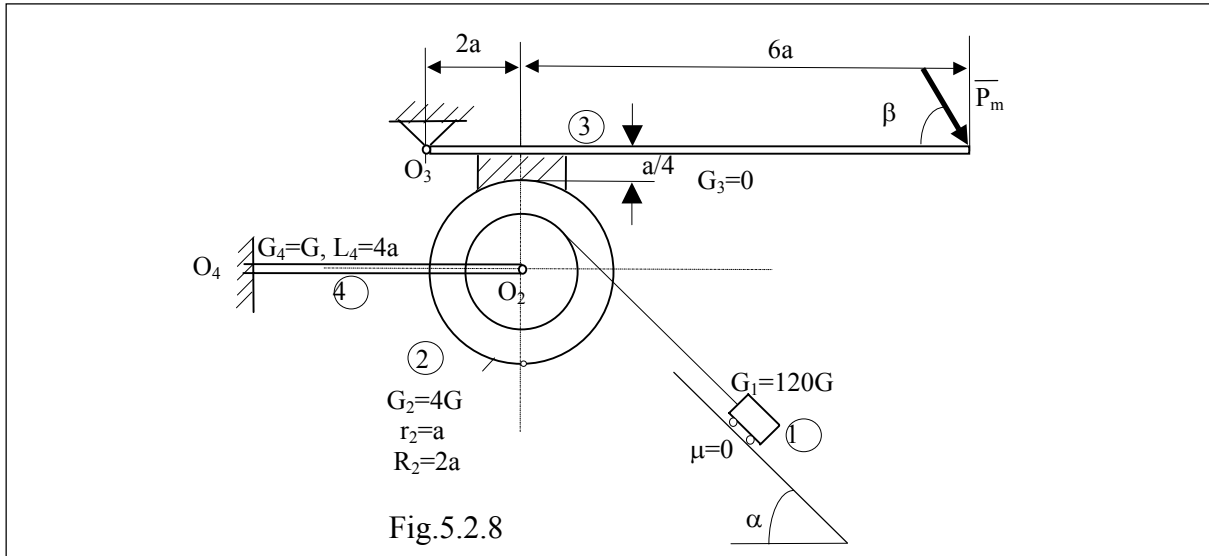
$$V_4 = 3G + 25G \left[ 2 \sin^2 \alpha + \left( 1 + \frac{1}{\mu} \right) \sin \alpha \sin \beta \right]$$

$$N_A = 2G + 100G \left( \sin 2\alpha + \sin \beta \cos \alpha - \frac{\sin \alpha \cos \beta}{\mu} \right)$$

PROBLEME PROPUSE

*Se consideră sistemul de frânare cu sabot, format din patru corpuri: (1), (2), (3), (4) (fig. 5.2.8 ... 5.2.10) sunt cunoscute:  $a$ ,  $G$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\mu = 0$  pe planul înclinat,  $\mu \neq 0$  pe sabot, corpul (3) de greutate neglijabilă. **Se cer:***

- 1) Ecuațiile de echilibru pentru fiecare corp folosind metoda izolării.
- 2) Determinarea forței minime ( $P_{min}$ ) pentru repaus.
- 3) Determinarea forțelor de legătură.



# CAPITOLUL VI

## SISTEME DE BARE ARTICULATE (GRINZI CU ZĂBRELE)

### REZUMAT DE TEORIE

Pentru determinarea eforturilor axiale din barele unui sistem de bare articulate static determinat (grinzi cu zăbrele) se folosesc frecvent două metode analitice: metoda izolării nodurilor și metoda secțiunilor (RITTER).

Mai întâi se verifică dacă sistemul de bare articulate este static determinat: dacă se notează cu  $n$  numărul de noduri și cu  $b$  numărul de bare articulate ale sistemului trebuie să fie îndeplinită următoarele condiții:  $b=2n-3$  pentru sistemele plane și  $b=3n-6$  pentru sistemele spațiale.

Mai întâi se determină forțele de legătură ale sistemului cu mediul fix, scriinduse ecuațiile de echilibrul forțelor corespunzătoare teoremei solidificării, după care se trece la rezolvarea propriu-zisă prin una din cele două metode:

#### a. Metoda izolării nodurilor

Această metodă se bazează pe *metoda izolării corpurilor sau pe teorema echilibrului părților* de la echilibrul sistemelor, considerând ca o "parte" a sistemului de bare câte un nod, care fiind izolat poate fi considerat ca un punct material acționat de forțe concentrate în acel nod. Aceste forțe sunt forțe interioare (eforturile din bare) sau forțele exterioare aplicate în noduri (forțele date și forțele de legătură cu mediul fix).

Se scriu ecuațiile de echilibru ale acestor forțe pentru fiecare nod al sistemului, sub forma proiecțiilor pe cele două /trei axe ale sistemului ales în plan/spațiu. În final dacă sistemul este static determinat numărul total de relații independente obținute este egal cu numărul total de necunoscute (reacțiuni + eforturi din bare) deci se poate rezolva analitic.

Se utilizează în cadrul acestei metode următoarea convenție: toate eforturile din bare se consideră inițial că sunt pozitive (de întindere) deci sensul lor este acela că ies din nod. Dacă din calcule (după rezolvarea sistemului de ecuații) rezultă pentru aceste eforturi valori negative, atunci ele sunt în realitate eforturi de compresiune.

#### b. Metoda secțiunilor (RITTER)

Această metodă se bazează tot pe *teorema echilibrului părților* și se utilizează atunci când interesează efortul dintr-o anumită bară (sau un număr redus de bare). Pentru aceasta se procedează în felul următor:

- se secționează sistemul de bare articulate cu un plan imaginar astfel încât să fie secționată și bara al cărei efort ne interesează și se introduc în secțiunile corespunzătoare ale barelor eforturile necunoscute notate cu  $S_{ij}$ , unde  $i, j$  sunt nodurile care definesc bara; cași în cazul metodei izolării nodurilor se consideră inițial că acestea sunt pozitive (ies din secțiune);
- conform teoremei ecilibrului părților, forțele care acționează asupra fiecărei "părți" obținute în urma secționării cu planul imaginar se află în echilibru deci eforturile din barele secționate reprezintă de fapt forțele interioare de acțiune reciprocă a celor două părți;
- pentru determinarea unui efort necunoscut (de exemplu în cazul unui sistem plan de bare articulate) se scrie ecuația de momente față de punctul de intersecție (nodul) al suporturilor celorlalte două eforturi necunoscute. Dacă cele două eforturi care nu interesează sunt paralele atunci pentru determinarea celui de-al treilea efort necunoscut se folosește ecuația de proiecții a forțelor după direcția perpendiculară la cele două eforturi.

## 6.1. GRINZI CU ZĂBRELE

### PROBLEME REZOLVATE

6.1. Se consideră grinda cu zăbrele din fig. 6.1.a

Se cunosc:  $a, \alpha = \frac{\pi}{4}, F_1 = 5\sqrt{2}F, F_2 = 10F, F_3 = 10F, F_4 = 20F$

Se cer: 1) Reacțiunile în reazemul simplu (1) și articulația (12)

2) Eforturile din nodurile (1), (2), (3)

3) Eforturile din barele: 6-8, 7-8, 7-9

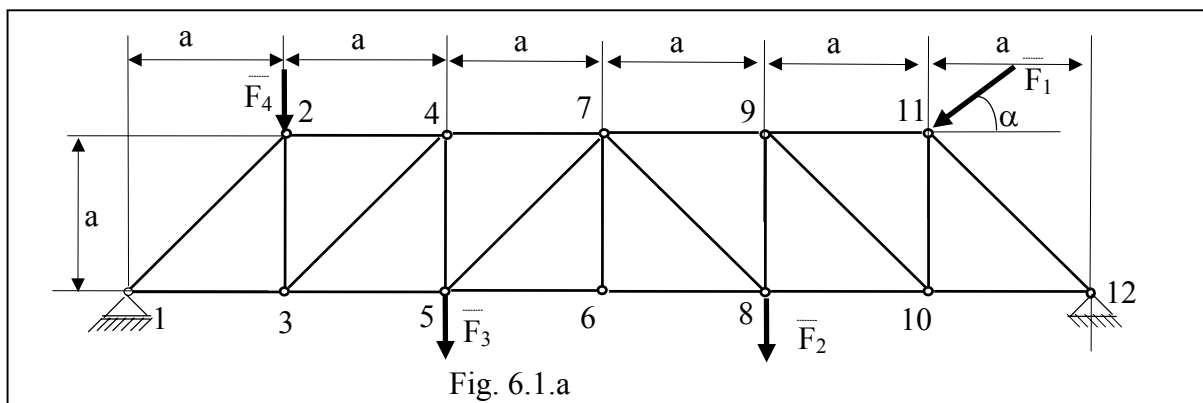
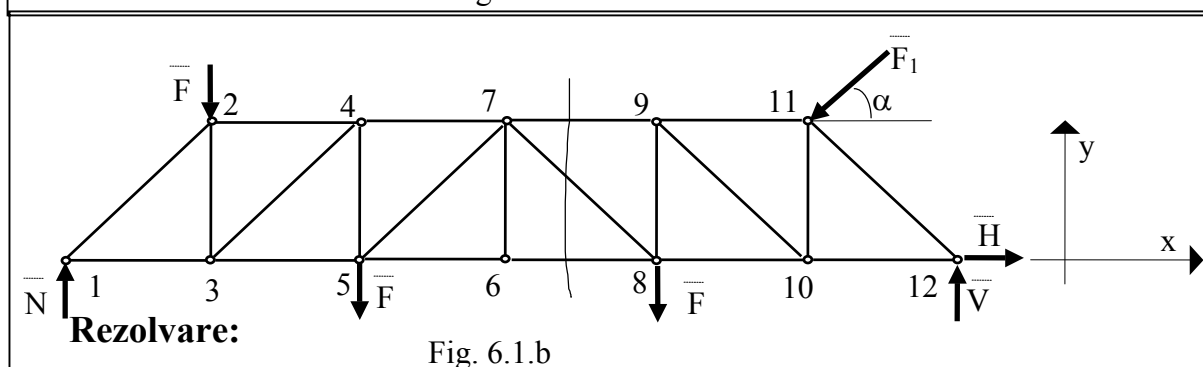


Fig. 6.1.a



Rezolvare:

Fig. 6.1.b



1. Se înlocuiesc legăturile 1 și 12 cu forțe de legătură și se scriu ecuațiile de echilibru pentru întreg sistemul de bare articulate:

$$\Sigma X_i = 0 \Rightarrow H - F_1 \cos \alpha = 0$$

$$\Sigma Y_i = 0 \Rightarrow N + V - F_1 \sin \alpha - F_2 - F_3 - F_4 = 0 \quad (a)$$

$$\Sigma M_{12} = 0 \Rightarrow N \cdot 6a - F_4 \cdot 5a - F_3 \cdot 4a - F_2 \cdot 2a - (F_1 \sin \alpha) \cdot a - (F_1 \cos \alpha) \cdot a = 0$$

Înlocuind cu valorile cunoscute se obține:

$$H = 5F, \quad N = \frac{85}{3}F, \quad V = \frac{50}{3}F \quad (b)$$

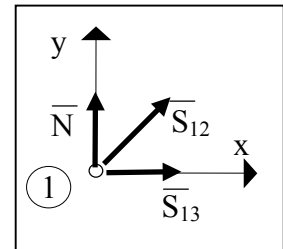
Pentru verificare se scrie relația de moment față de 1:

$$\Sigma M_1 = 0: V \cdot 6a - (F_1 \sin \alpha) \cdot 5a + (F_1 \cos \alpha) \cdot a - F_2 \cdot 4a - F_3 \cdot 2a - F_4 \cdot a = 0 \quad (c)$$

2. Se izolează nodurile în ordinea: (1), (2), (3) și se scriu ecuațiile de echilibru pentru fiecare:

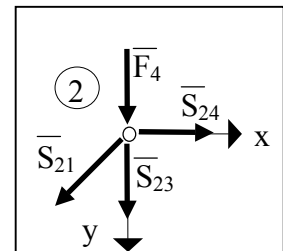
Nodul 1:

$$\begin{cases} \Sigma X_i = 0 \Rightarrow S_{13} + S_{12} \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \\ \Sigma Y_i = 0 \Rightarrow N + S_{12} \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} S_{13} = \frac{85}{3}F \\ S_{12} = -\frac{85\sqrt{2}}{3}F \end{cases} \quad (d)$$



Nodul 2:

$$\begin{cases} \Sigma X_i = 0 \Rightarrow S_{24} - S_{21} \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \\ \Sigma Y_i = 0 \Rightarrow -F_4 - S_{23} - S_{21} \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} S_{24} = -\frac{85}{3}F \\ S_{23} = \frac{25}{3}F \end{cases} \quad (e)$$



Nodul 3:

$$\begin{cases} \Sigma X_i = 0 \Rightarrow -S_{31} + S_{35} + S_{34} \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \\ \Sigma Y_i = 0 \Rightarrow S_{32} + S_{34} \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} S_{35} = \frac{110}{3}F \\ S_{34} = -\frac{25\sqrt{2}}{3}F \end{cases} \quad (f)$$

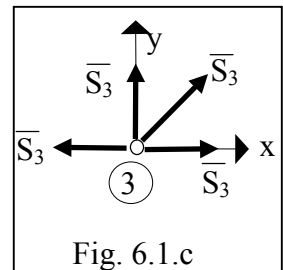


Fig. 6.1.c

Pentru determinarea eforturilor din barele 6-8, 7-8, 7-9 se aplică metoda secțiunilor scriind ecuațiile de momente sau de proiecție pentru forțele corespunzătoare părții din stânga secțiunii imaginare considerate (fig.6.1.d).

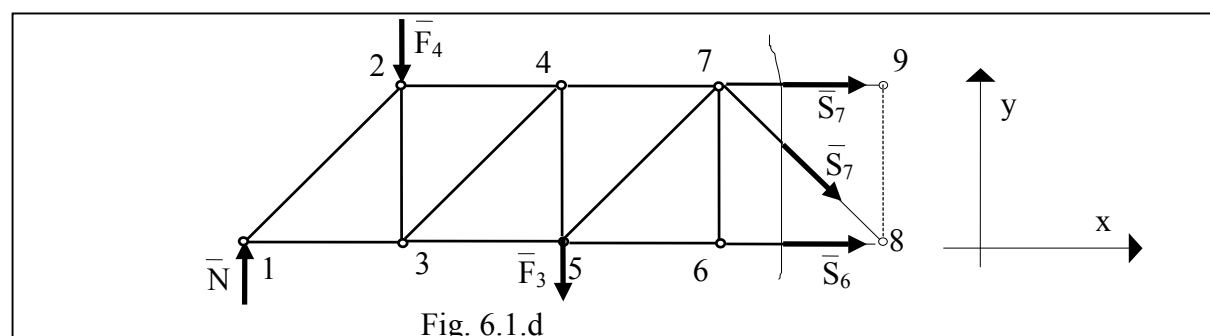


Fig. 6.1.d

Suma momentelor forțelor față de nodurile 7 și 8 și suma proiecțiilor pe verticală a forțelor corespunzătoare pentru această parte, se scrie astfel:

$$\Sigma M_7 = 0 \Rightarrow S_{68} \cdot a + F_3 \cdot a + F_4 \cdot 2a - N \cdot 3a = 0 \Rightarrow S_{68} = 35F$$

$$\Sigma M_8 = 0 \Rightarrow S_{79} \cdot a - F_3 \cdot 2a - F_4 \cdot 3a + N \cdot 4a = 0 \Rightarrow S_{79} = -\frac{100}{3}F \quad (g)$$

$$\Sigma Y_i = 0 \Rightarrow N - F_4 - F_3 - S_{78} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \Rightarrow S_{78} = -\frac{5\sqrt{2}}{3}F \quad (h)$$

**6.2. Se consideră grinda cu zăbrele din fig. S6.2.a**

Se cunosc:  $a$ ,  $\alpha = \frac{\pi}{4}$ ,  $F_1 = 10\sqrt{2}F$ ,  $F_2 = F_3 = F_4 = 20F$ . **Se cer:**

- 1) Reacțiunile din reazemul simplu (2) și articulația (12);
- 2) Eforturile în nodurile (1), (2), (3);
- 3) Eforturile în barele: 6-8, 7-8, 7-9.

**Rezolvare:**

- 1) Se înlocuiesc legăturile cu forțe de legătură și se scriu ecuațiile de echilibru pentru întregul sistem de bare articulate.

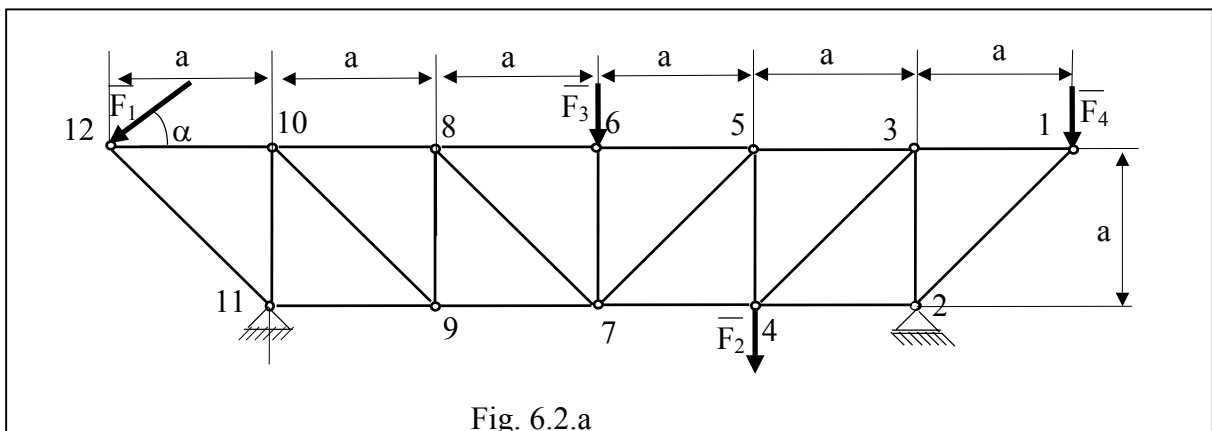


Fig. 6.2.a

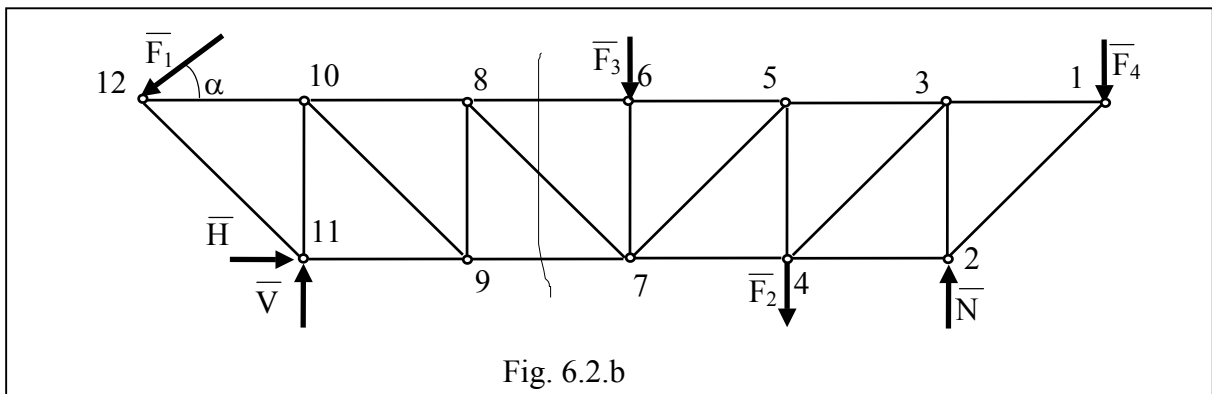


Fig. 6.2.b

$$\Sigma X_i = 0 \Rightarrow H - F_1 \cos\alpha = 0$$

$$\Sigma Y_i = 0 \Rightarrow V + N - F_1 \sin\alpha - F_3 - F_2 - F_4 = 0 \quad (a)$$

$$\Sigma M_{12} = 0 \Rightarrow N \cdot 4a - F_4 \cdot 5a - F_2 \cdot 3a - F_3 \cdot 2a + (F_1 \cos\alpha)a + (F_1 \sin\alpha)a = 0$$

Ecuția de momente față de (2) este o ecuație de verificare:

$$\Sigma M_2 = 0: V \cdot 4a - (F_1 \cos \alpha)a - (F_1 \sin \alpha)5a - F_3 \cdot 2a - F_2 \cdot a + F_4 \cdot a = 0 \quad (b)$$

Înlocuind valorile cunoscute se obține:

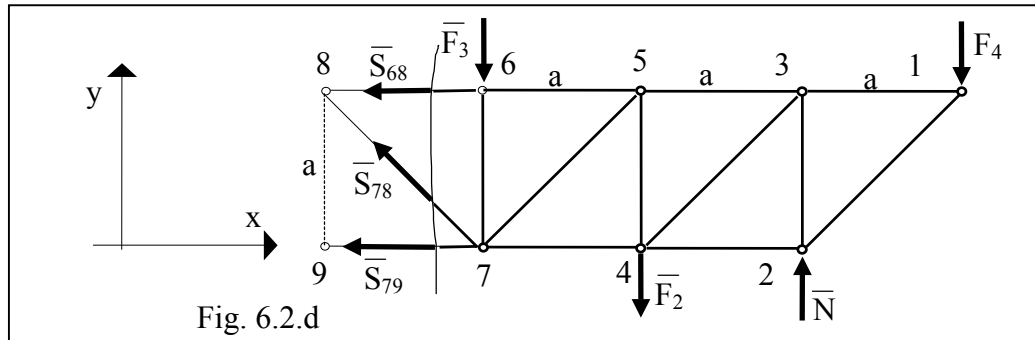
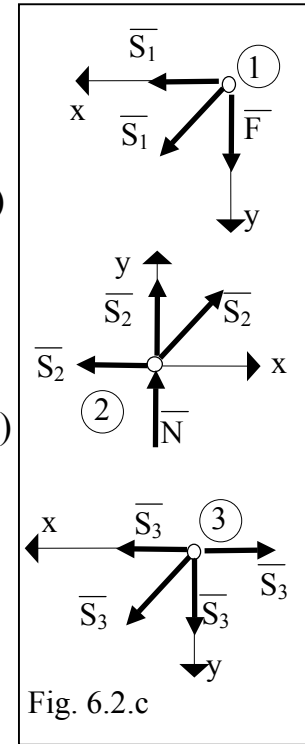
$$H = 10F, \quad V = 25F, \quad N = 45F. \quad (c)$$

2) Folosind metoda izolării nodurilor pentru nodurile (1), (2) și (3) avem:

$$\text{Nodul 1: } \begin{cases} \Sigma X_i = 0 \Rightarrow S_{13} + S_{12} \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \Rightarrow S_{13} = 20F \\ \Sigma Y_i = 0 \Rightarrow S_{12} \frac{\sqrt{2}}{2} + F_4 = 0 \Rightarrow S_{12} = -20\sqrt{2}F \end{cases} \quad (d)$$

$$\text{Nodul 2: } \begin{cases} \Sigma X_i = 0 \Rightarrow S_{21} \frac{\sqrt{2}}{2} - S_{24} = 0 \Rightarrow S_{24} = -20F \\ \Sigma Y_i = 0 \Rightarrow S_{21} \frac{\sqrt{2}}{2} + S_{23} + N = 0 \Rightarrow S_{23} = -25F \end{cases} \quad (e)$$

$$\text{Nodul 3: } \begin{cases} \Sigma X_i = 0 \Rightarrow S_{35} - S_{31} + S_{34} \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \Rightarrow S_{35} = -5F \\ \Sigma Y_i = 0 \Rightarrow S_{32} + S_{34} \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \Rightarrow S_{34} = 25\sqrt{2}F \end{cases} \quad (f)$$



3) Se aplică metoda secțiunilor, scriind două ecuații de momente față de nodurile 7 și 8 și o ecuație de proiecții pe verticală, pentru forțele corespunzătoare părții din dreapta:

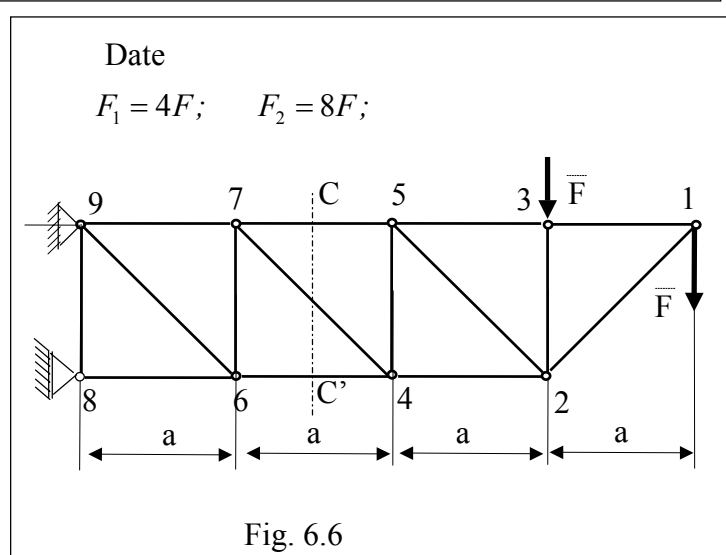
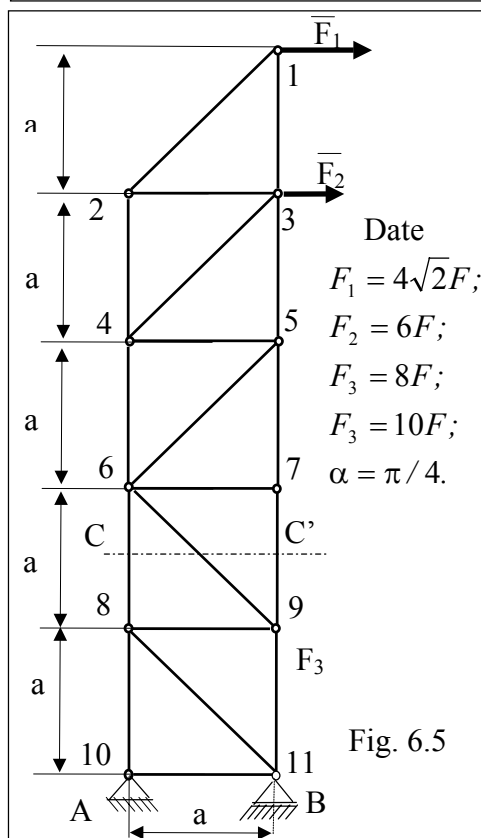
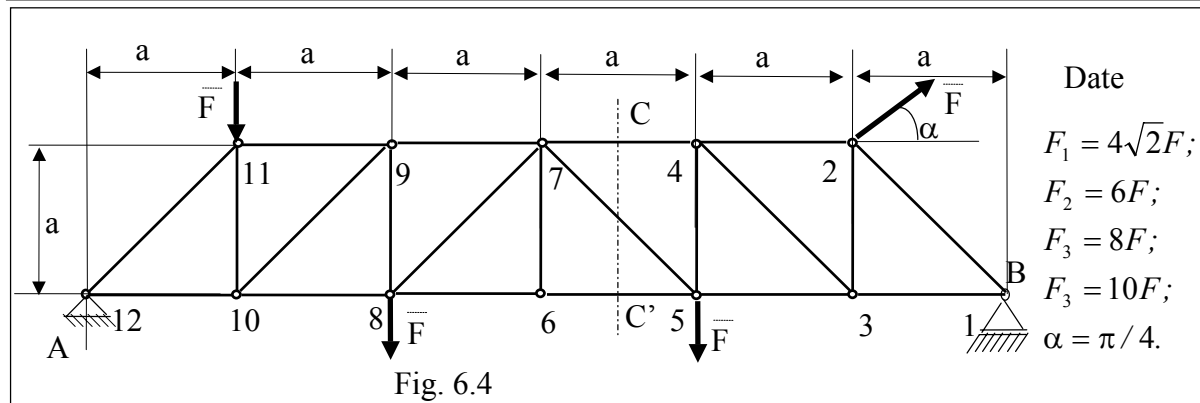
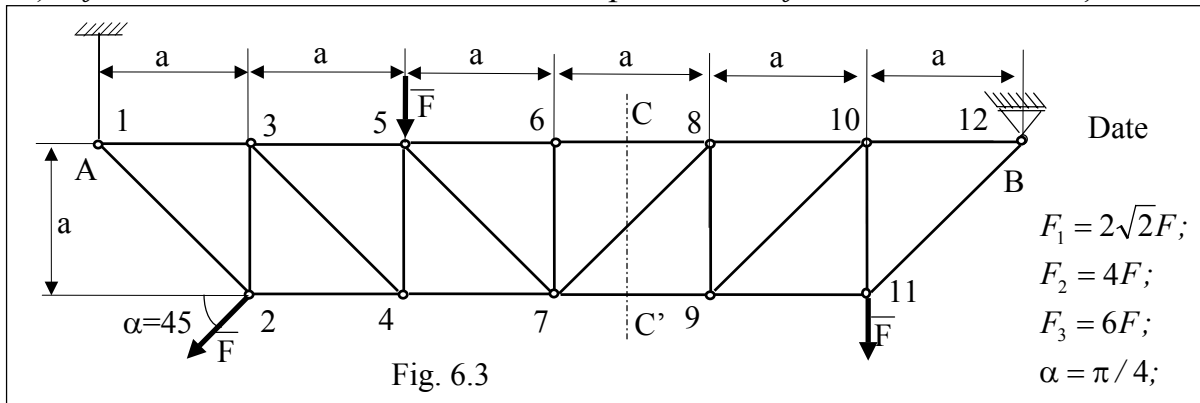
$$\begin{cases} \Sigma M_7 = 0 \Rightarrow S_{68} \cdot a - F_2 \cdot a + N \cdot 2a - F_4 \cdot 3a = 0 & \Rightarrow S_{68} = -5F \\ \Sigma M_8 = 0 \Rightarrow S_{79} \cdot a + F_3 \cdot a + F_2 \cdot 2a - N \cdot 3a + F_4 \cdot 4a = 0 & \Rightarrow S_{79} = -5F \\ S_{78} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - F_3 - F_2 + N - F_4 = 0 & \Rightarrow S_{78} = 15\sqrt{2}F \end{cases} \quad (g)$$

**PROBLEME PROPUSE**

Se consideră grinzile cu zăbrele din fig. 6.3...6.6

Se cunosc:  $a, \alpha, F_1, F_2, F_3, F_4$ . Se cer:

- 1) Reacțiunile în reazemul simplu (sau firul) (A) și articulația (B)
- 2) Eforturile din nodurile (1), (2), (3) folosind metoda izolării nodurilor
- 3) Eforturile din barele intersectate de planul CC' folosind metoda secțiunilor.



## CAPITOLUL VII

### STATICA FIRULUI OMOGEN GREU

#### REZUMAT DE TEORIE

Se consideră un fir omogen greu de lungime  $L$  și de greutate specifică pe unitatea de lungime  $\bar{p}$  având punctele de prindere de la capetele sale notate în continuare cu A și B (fig. 7.1). Se urmărește în acest capitol :

- determinarea formei de echilibru (curba funiculară)
- determinarea modului de variație a tensiunii interioare din fir (efortul de întindere dintr-o secțiune oarecare atunci când firul este supus suplimentar (în afară de greutatea proprie ) acțiunii unor forțe exterioare.

Ipotezele de lucru folosite sunt:

- firul se consideră ca un corp unidimensional (dimensiunile secțiunii se neglijează în raport cu lungimea sa)
- perfect flexibil (nu poate prelua eforturi de încovoiere )
- perfect inextensibil (nu își modifică lungimea sub acțiunea sarcinilor exterioare)

În aceste condiții ecuația generală de echilibru a firului sub formă vectorială se scrie:

$$\frac{d\bar{S}}{ds} + \bar{p} = 0 \quad (1)$$

unde:  $\bar{S} = \bar{S}(s)$  este funcția vectorială a tensiunii din fir funcție de arcul  $s$ , iar  $\bar{p}$  este greutatea specifică pe unitatea de lungime a firului

Forma de echilibru a firului omogen greu este o curbă numită lăntișor având ecuația:

$$y = a \operatorname{ch}(x/a + C_1) + C_2 \quad (2)$$

Dacă curba este raportată la un sistem de axe Oxy și este simetrică în raport cu axa Oy, iar minimumul C are ordonata a atunci ecuația are forma simplă:

$$y = a \operatorname{ch}(x/a) \quad (3)$$

Lungimea unui arc limitat este  $s = \operatorname{arc}(CM) = a \operatorname{sh}(x/a)$ , lungimea întregii curbe este:

$$L = 2a \operatorname{sh}(L/a) = AB = 2a \cdot \operatorname{sh}(\ell/a) = 2a \cdot \operatorname{tg} \alpha \Rightarrow a = L / 2 \operatorname{tg} \alpha \operatorname{ch}(x/a).$$

Valoarea tensiunii  $S$  într-un punct oarecare al firului  $M(x,y)$  este proporțională cu ordonata  $y$  a punctului și are expresia:

$$S = p y = p a \operatorname{ch}(x/a) \quad (4)$$

PROBLEME REZOLVATE

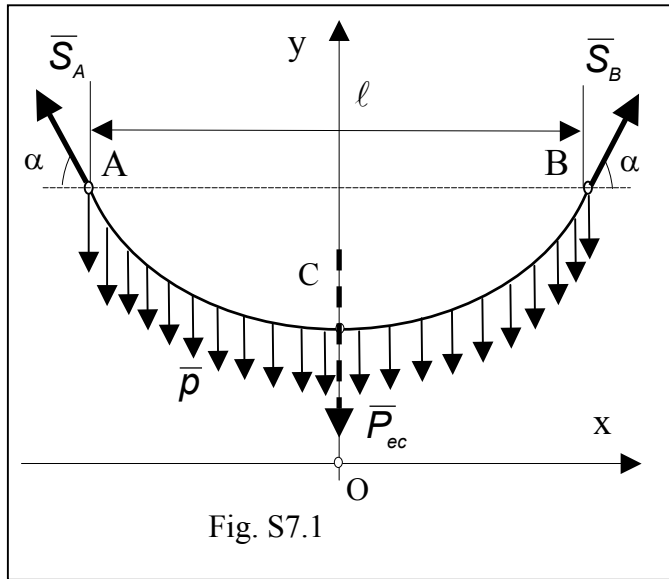


Fig. S7.1

**7.1. Se consideră un fir omogen de lungime  $L$  și greutate specifică pe unitatea de lungime  $\bar{p}$ , suspendat în punctele  $A$  și  $B$  aflate pe aceeași orizontală (ca în fig 7.1). Tangenta la fir în punctele  $A$  și  $B$  face cu orizontala același unghi  $\alpha$  cunoscut.**

**Se cer:** 1) valorile tensiunii în punctele  $A$ ,  $B$  (capetele firului) și  $C$  (situat în punctul cel mai de jos al firului); 2) săgeata firului  $f$ ; 3) distanța  $AB = \ell$ .

**Rezolvare**

- 1) Tensiunea într-un punct oarecare  $M(x,y)$  al firului conform relației (4) este:
- $$S = p y = p a \operatorname{ch}(x/a) \tag{a}$$

Având în vedere că lungimea totală a firului se poate scrie:

$$L = \operatorname{arc}(AB) = 2 \operatorname{arc}(CB) = 2a \operatorname{sh}(\ell/2a) \tag{b}$$

iar din fig. S7.1 se poate scrie:

$$\operatorname{tg} \alpha = f'(\ell/2) = \operatorname{sh}(x/a) \Big|_{x=\ell/2} = \operatorname{sh}(\ell/2a) \tag{c}$$

rezultă că lungimea totală a firului este:

$$L = 2a \operatorname{sh}(\ell/2a) = 2a \operatorname{tg} \alpha, \Rightarrow a = L/2 \operatorname{tg} \alpha \tag{d}$$

Tensiunea într-un punct oarecare al firului fiind:  $S = p a \operatorname{ch}(x/a)$ , rezultă că pentru  $x=0$  se obține tensiunea din punctul C:

$$S_C = p a = pL/2 \operatorname{tg} \alpha \tag{e}$$

Întrucât proiecția pe orizontală a tensiunii în orice punct al firului este constantă se poate scrie:  $S_A \cos \alpha = S_B \cos \alpha = S_C = H$ , de unde rezultă:

$$S_A = S_B = S_C / \cos \alpha = pL/2 \cos \alpha \tag{f}$$

- 2) Săgeata  $f$  a firului rezultă din relațiile tensiunilor din B și C:

$$f = y_B - y_C = S_B / p - S_C / p = L(1 - \cos \alpha) / 2 \sin \alpha \tag{g}$$

- 3) Pentru calculul distanței  $AB = \ell$  se ține seama de faptul că:

$$\operatorname{sh} \ell / 2a = L / 2a = \operatorname{tg} \alpha \quad \text{și} \quad \operatorname{ch} \ell / a = \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 \ell / a} = 1 / \cos \alpha \tag{h}$$

precum și de definițiile funcțiilor hiperbolice obținându-se:

$$\begin{aligned} sh\ell / 2a + ch\ell / 2a &= e^{\ell/2a} = (1 + \sin \alpha) / \cos \alpha; \\ \Rightarrow \ell / 2a &= \ln \frac{1 + \sin \alpha}{\cos \alpha}, \Rightarrow AB = \ell = 2a \cdot \ln \frac{1 + \sin \alpha}{\cos \alpha} \end{aligned} \quad (i)$$

**Observație:**

1. La aceleași rezultate se poate ajunge dacă se pornește de la scrierea ecuațiilor de echilibru ale forțelor firului liberat de legăturile din A și B (fig.7.1)

Aceste ecuații se scriu:

$$\begin{aligned} \sum X_i = 0 &\Leftrightarrow -S_A \cos \alpha + S_B \cos \alpha = 0 \\ \sum Y_i = 0 &\Leftrightarrow (S_A + S_B) \sin \alpha - P_{ec} = 0 \end{aligned} \quad (j)$$

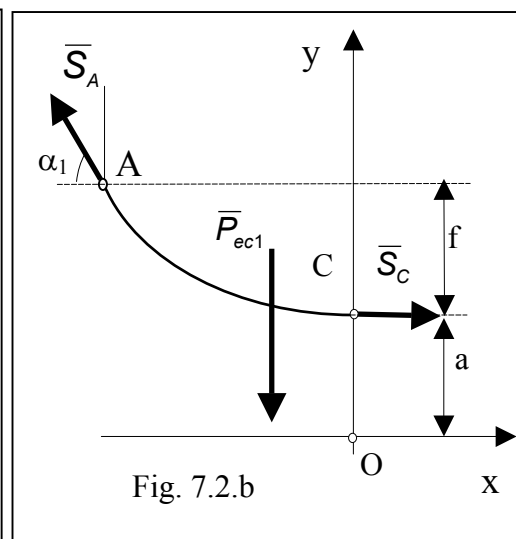
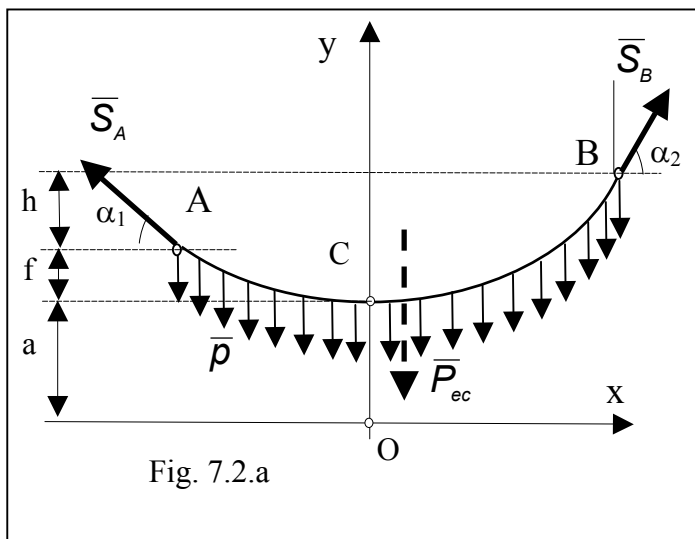
unde  $P_{ec}$  este forța echivalentă a sistemului de forțe paralele:

$$P_{ec} = \int_{AB} p ds = pL$$

2. După determinarea celor două tensiuni din fir, celelalte necunoscute se determină folosind procedeul prezentat anterior.

**7.2. Se consideră un fir omogen de lungime  $L$  și greutate specifică pe unitatea de lungime  $\bar{p}$ , suspendat în punctele A și B a căror diferență de nivel  $h$  este necunoscută (ca în fig 7.2). Tangentele la fir în punctele A și B fac cu orizontala unghiurile  $\alpha_1$  și  $\alpha_2$  cunoscute.**

**Se cer:** 1) valorile tensiunii în punctele A , B (capetele firului) și C (situat în punctul cel mai de jos al firului); 2) diferența de nivel  $h$  ; 3) lungimea firului  $L_1$  între A și C și diferența de nivel dintre punctele A și C .



**Rezolvare**

- 1) Dacă se izolează firul și se scriu ecuațiile de echilibru ale forțelor firului eliberat de legăturile din A și B (fig.7.1.a) se obține:

$$\sum X_i = 0 \Leftrightarrow -S_A \cos \alpha_1 + S_B \cos \alpha_2 = 0 \quad (a)$$

$$\sum Y_i = 0 \Leftrightarrow S_A \sin \alpha_1 + S_B \sin \alpha_2 - P_{ec} = 0$$

$$\Rightarrow S_A = \frac{pL \cos \alpha_2}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)}; \quad (b)$$

$$S_B = \frac{pL \cos \alpha_1}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)}$$

unde  $P_{ec}$  este forța echivalentă a sistemului de forțe paralele:

$$P_{ec} = \int_{AB} p ds = pL$$

- 2) Cunoscând coordonatele A( $x_A, y_A$ ) și B( $x_B, y_B$ ) și tensiunile din fir în A și B:  $S_A = py_A$ ,  $S_B = py_B$ , avem:

$$h = y_B - y_A = \frac{S_B}{p} - \frac{S_A}{p} = \frac{L(\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1)}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)} \quad (c)$$

$$h = L \frac{\sin \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2}}{\cos \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}}$$

- 3) Izolând porțiunea de fir cuprinsă între A și C (fig. 7.2.b) și scriind ecuațiile de echilibru ale forțelor firului liberat de legăturile din A și C se obține:

$$\sum X_i = 0 \Leftrightarrow -S_A \cos \alpha_1 + S_C = 0 \quad (d)$$

$$\sum Y_i = 0 \Leftrightarrow S_A \sin \alpha_1 - P_{ec1} = 0$$

$$\Rightarrow S_C = S_A \cos \alpha_1 = pL \frac{\cos \alpha_1 \cos \alpha_2}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)} \quad (e)$$

$$\Rightarrow L_1 = \frac{S_A \sin \alpha_1}{p} = L \frac{\sin \alpha_1 \cos \alpha_2}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)}$$

unde  $P_{ec}$  este forța echivalentă a sistemului de forțe paralele:

$$P_{ec1} = \int_{AC} p ds = pL_1$$

Diferența de nivel dintre punctele A și C se scrie:

$$f = y_A - a = \frac{S_A}{p} - \frac{S_C}{p} \quad (f)$$

$$f = L \frac{\cos \alpha_2 (1 - \cos \alpha_1)}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)}$$



**7.3. Se consideră un fir de greutate neglijabilă, suspendat în punctele A și B aflate pe aceeași orizontală (ca în fig. 7.2). În punctele  $O_1$  și  $O_2$  ale firului sunt atârinate corpurile 1 și 2 având greutatea  $G_1$  și  $G_2$ , cu săgețile corespunzătoare  $f_1$  și  $f_2$ .**

**Se cer:** 1) valorile tensiunii pe cele trei porțiuni ale firului; 2) unghiul  $\beta$  pe care îl face porțiunea de fir  $O_1O_2$  cu orizontala; 3) lungimea totală a firului și distanța  $A_1A_2$  dintre punctele de suspensie.

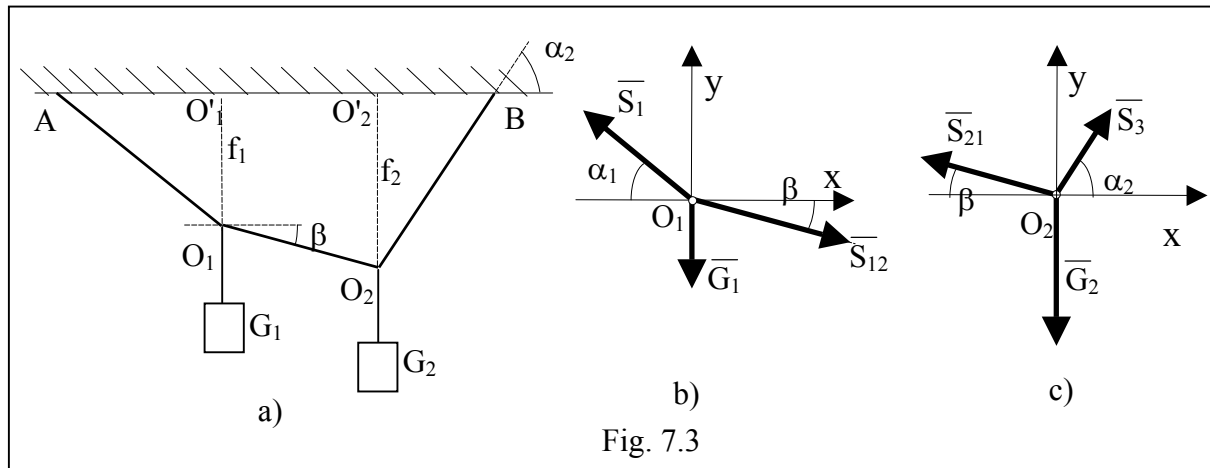


Fig. 7.3

**Rezolvare**

Întrucât firul nu are greutate, pe cele trei porțiuni  $A_1O_1$ ,  $O_1O_2$ ,  $O_2B$ , tensiunile din fir sunt constante. Pentru rezolvarea problemei se izolează nodurile  $O_1$  și  $O_2$  și se scriu ecuațiile de echilibru al forțelor (fig. 7.3.b și c.) obținându-se:

$$\begin{aligned}
 \text{Nodul } O_1 : & \begin{cases} -S_1 \cos \alpha_1 + S_{12} \cos \beta = 0 \\ S_1 \sin \alpha_1 + S_{12} \sin \beta - G_1 = 0 \end{cases} \\
 \text{Nodul } O_2 : & \begin{cases} S_2 \cos \alpha_2 - S_{21} \cos \beta = 0 \\ S_2 \sin \alpha_2 + S_{12} \sin \beta - G_2 = 0 \end{cases} \tag{a}
 \end{aligned}$$

unde :  $S_{12} = S_{21}$

Rezolvând acest sistem rezultă:

$$S_1 = (G_1 + G_2) \frac{\cos \alpha_2}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)}; \quad S_2 = (G_1 + G_2) \frac{\cos \alpha_1}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)}; \tag{b}$$

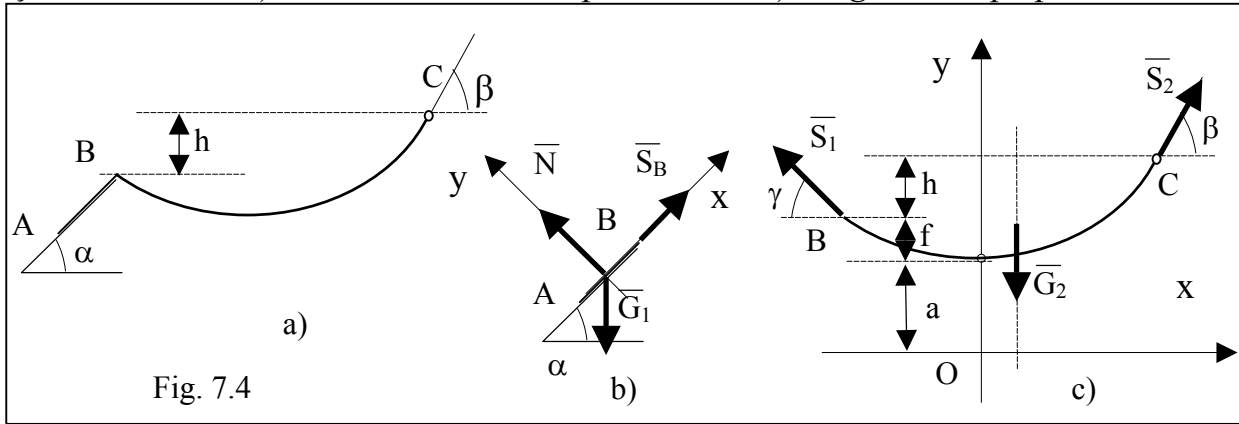
$$\text{tg} \beta = (G_2 \text{tg} \alpha_1 - G_1 \text{tg} \alpha_2) / (G_1 + G_2)$$

$$S_{12} = \sqrt{S_1^2 + G_1^2 - S_1 G_1 \sin \alpha_1} = S_{21} = \sqrt{S_2^2 + G_2^2 - S_2 G_2 \sin \alpha_2} \tag{c}$$

Lungimea totală a firului și distanța AB se determină astfel:

$$L = \frac{f_1}{\cos \alpha_1} + \frac{f_2 - f_1}{\cos \beta} + \frac{f_2}{\cos \alpha_2}; \quad AB = f_1 \text{ctg} \alpha_1 + (f_2 - f_1) \text{ctg} \beta + f_2 \text{ctg} \alpha_2$$

7.4 Se consideră un fir omogen greu aflat în repaus, având porțiunea AB pe un plan înclinat cu unghiul  $\alpha$  fără frecare și porțiunea BC liberă (ca în fig 7.4.a). Se cunosc:  $\bar{p}$  greutatea specifică pe unitatea de lungime a firului, unghiul  $\alpha$ , unghiul  $\beta$  pe care îl face tangenta la fir cu orizontala în punctul C, diferența de nivel  $h$  dintre punctele B și C, lungimea firului  $L$  dintre punctele B și C. Se cer: 1) valoarea tensiunii în punctul C; 2) lungimea  $L_1$  pe planul AB.



**Rezolvare**

Dacă se izolează cele două porțiuni de fir și se scriu ecuațiile de echilibru ale forțelor firului eliberat de legături,

➤ pentru AB (fig.S7.4.b) se obține:

$$\begin{aligned} \sum X_i = 0 &\Leftrightarrow S_1 - G_1 \sin \alpha = 0 &\Rightarrow S_1 = pL_1 \sin \alpha \\ \sum Y_i = 0 &\Leftrightarrow N - G_1 \cos \alpha = 0 & \hspace{10em} (a) \\ G_1 &= pL_1; \quad S_1 = S_B \end{aligned}$$

➤ pentru BC (fig.S7.4.c) se obține:

$$\begin{cases} -S_B \cos \gamma + S_C \cos \beta = 0 \\ S_B \sin \gamma + S_C \sin \beta - G_2 = 0 \quad (G_2 = pL) \end{cases} \Rightarrow S_B = \sqrt{S_C^2 + G_2^2 - S_C G_2 \sin 2\beta} \quad (b)$$

Cunoscând ordonata punctului C și relația dintre tensiuni  $S_C = py_C$

$$\Rightarrow S_C = pa \cdot ch \frac{x_C}{a} = pa \cdot \sqrt{1 + sh^2} \frac{x_C}{a} = \frac{pa}{\cos \beta}; \quad (c)$$

Înlocuind expresiile obținute pentru  $S_B$  și  $S_C$  se obține:

$$p^2 L_1^2 \sin^2 \alpha = \frac{p^2 a^2}{\cos^2 \beta} - 2pLa \frac{\sin \beta}{\cos \beta} + p^2 L^2 \quad (d)$$

Din fig. 7.4.c avem:

$$h = y_C - y_B = \frac{S_C}{p} - \frac{S_B}{p} = \frac{a}{\cos \beta} - L_1 \sin \alpha \Rightarrow L_1 \sin \alpha = \frac{a}{\cos \beta} - h \quad (e)$$

$$a = \frac{(L^2 - h^2) \cos \beta}{2(L \sin \beta - h)}. \quad (f)$$

$$S_C = \frac{pa}{\cos \beta} = \frac{p(L^2 - h^2)}{2(L \sin \beta - h)}; \quad L_1 = \frac{S_B}{p \sin \alpha} = \frac{L^2 + h^2 - 2Lh \sin \beta}{2 \sin \alpha (L \sin \beta - h)}. \quad (g)$$

## CAPITOLUL VIII

### CINEMATICA PUNCTULUI MATERIAL

#### PROBLEME REZOLVATE

**8.1 Se consideră** un punct material având vectorul de poziție în raport cu originea  $O$  a sistemului de axe  $Oxy$  dat de:  $\vec{r} = \overline{OM} = 4t \vec{i} + (16t^2 - 1) \vec{j}$  (cm).

**Se cer:** 1) Ecuația traiectoriei și trasarea ei în sistemul de axe  $Oxy$ ; 2) Viteza și accelerația punctului la momentul  $t$ ; 3) Poziția, viteza și accelerația punctului la momentul  $t_1 = 1/2$  s, precum și raza de curbură a traiectoriei la același moment.

**Rezolvare :**

1) Ecuațiile sub formă parametrică ale traiectoriei sunt :

$$\begin{cases} x = 4t \\ y = 16t^2 - 1 \end{cases}$$

Eliminând parametrul  $t$  din ecuațiile (a) se obține ecuația sub formă implicită a traiectoriei:

$$x^2 - y - 1 = 0$$

Această ecuație reprezintă o parabolă (fig. 8.1) cu vârful în  $V(0, -1)$  care intersectează axa  $Ox$  în punctele  $A(-1, 0)$   $B(1, 0)$ .

2) Viteza și accelerația punctului la momentul  $t$  se detremină cu ajutorul proiecțiilor:

• Viteza:

$$v_x = \dot{x} = 4$$

$$v_y = \dot{y} = 32t$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{16 + (32t)^2}$$

• Accelerația:

$$a_x = \ddot{x} = 0$$

$$a_y = \ddot{y} = 32$$

$$\Rightarrow a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = 32$$

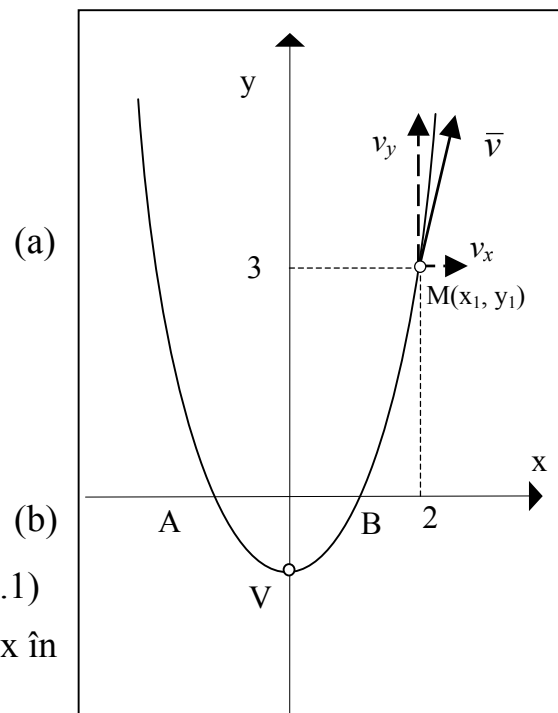


Fig. 8.1.a

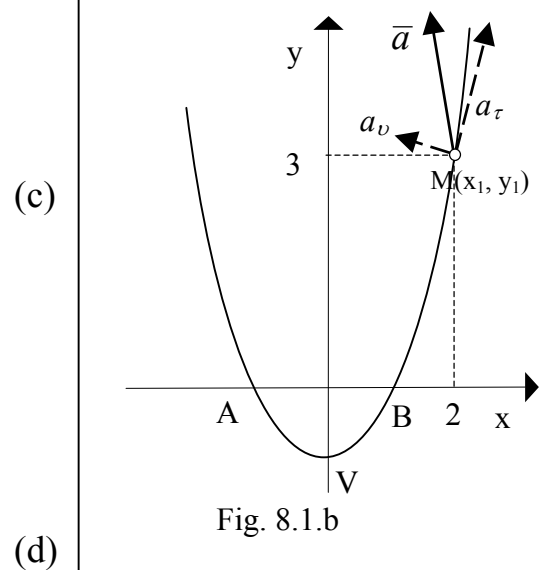


Fig. 8.1.b

3) Poziția, viteza și accelerația punctului, raza de curbură a traiectoriei la momentul  $t_1=1/2 s$  sunt :

• poziția: 
$$\begin{cases} x(t_1) = 2 \text{ cm} \\ y(t_1) = 3 \text{ cm} \end{cases}; \quad (e)$$

• viteza: 
$$\begin{cases} \dot{x}(t_1) = 4 \\ \dot{y}(t_1) = 16 \end{cases} \Rightarrow v(t_1) = 16,5 \text{ cm/s} \quad (f)$$

• accelerația: 
$$a(t_1) = 32 \text{ cm/s}^2 \quad (g)$$

Accelerația tangențială la momentul  $t_1=1/2 s$  se obține prin derivarea în raport cu timpul a vitezei:

$$a_\tau = \left| \frac{dv}{dt} \right| = |\dot{v}| = \frac{2v_x \dot{v}_x - 2v_y \dot{v}_y}{2\sqrt{v_x^2 + v_y^2}} = \frac{v_x a_x - v_y a_y}{v}$$

$$\Rightarrow a_\tau(t_1) = 31 \text{ cm/s}^2$$

Accelerația normală la momentul  $t_1$  este prin urmare:

$$a_v = \sqrt{a^2 - a_\tau^2} \Rightarrow a_v(t_1) = 7,94 \text{ cm/s}^2 \quad (h)$$

• raza de curbură a traiectoriei ( $\rho$ ) se calculează cu ajutorul formulei:

$$\rho = \frac{\sqrt{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^3}}{|\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}y|} \quad \text{sau:} \quad \rho = \frac{v^2}{a_v}$$

Raza de curbură la momentul  $t_1=1/2 s$  este:

$$\rho(t_1) = 34,3 \text{ cm} \quad (i)$$

Elementele calculate sunt reprezentate în fig. 8.1. și sunt trecute în tabelul următor :

Coordonate (cm)		Viteze (cm/s)			Accelerații (cm/s <sup>2</sup> )					Raza (cm)
$x$	$y$	$v_x$	$v_y$	$v$	$a_x$	$a_y$	$a$	$a_\tau$	$a_v$	$\rho$
2	3	4	16	16,5	0	32	32	31	7,94	34,3

**8.2 Se consideră un punct material pentru care se cunoaște vectorul de poziție în raport cu originea  $O$  a sistemului de axe  $Oxy$ :**  
 $\vec{r} = \overline{OM} = (3 \sin \pi t)\vec{i} + (2 \cos \pi t)\vec{j} \text{ (cm)}.$

**Se cer:** 1) Ecuația traiectoriei (sub formă parametrică și implicită în sistemul de axe  $Oxy$ ) și să se reprezinte grafic în sistemul de axe  $Oxy$ ; 2) Viteza și accelerația punctului; 3) Poziția, viteza și accelerația punctului la momentul  $t_1=1/3 s$ , precum și raza de curbură a traiectoriei la același moment.

**Rezolvare :**

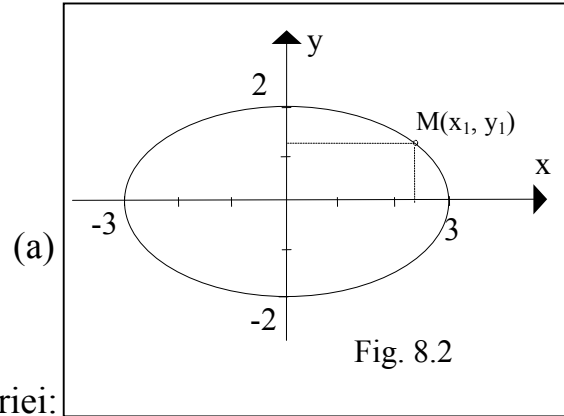
3) Ecuațiile sub formă parametrică ale traiectoriei sunt :

$$\begin{cases} x = 3 \sin \pi t \\ y = 2 \cos \pi t \end{cases}$$

Eliminând parametrul  $t$  din ecuațiile (a) se obține ecuația sub formă implicită a traiectoriei:

$$\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{2^2} - 1 = 0 \tag{b}$$

Această ecuație reprezintă o elipsă cu centrul în originea sistemului de axe, de semiaxe:  $a=3, b=2$  (fig. 8.2)



2) Viteza și accelerația punctului la momentul  $t$  se determină cu ajutorul proiecțiilor:

• Viteza:

$$\begin{aligned} v_x &= \dot{x} = 3\pi \cos \pi t \\ v_y &= \dot{y} = -2\pi \sin \pi t \end{aligned} \tag{c}$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \pi \sqrt{9 \cos^2 \pi t + 4 \sin^2 \pi t} = \pi \sqrt{4 + 5 \cos^2 \pi t}$$

• Accelerația:

$$\begin{aligned} a_x &= \ddot{x} = -3\pi^2 \sin \pi t \\ a_y &= \ddot{y} = -2\pi^2 \cos \pi t \end{aligned} \tag{d}$$

$$\Rightarrow a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \pi^2 \sqrt{9 \sin^2 \pi t + 4 \cos^2 \pi t} = \pi^2 \sqrt{4 + 5 \sin^2 \pi t}$$

3) Poziția, viteza și accelerația punctului, raza de curbură a traiectoriei la momentul  $t_1=1/3$  s sunt :

• poziția:  $\begin{cases} x(t_1) = \frac{3\sqrt{3}}{2} = 2,598 \text{ cm} ; \\ y(t_1) = 1 \text{ cm} \end{cases} \tag{e}$

• viteza:  $\begin{cases} \dot{x}(t_1) = \frac{3\pi}{2} \\ \dot{y}(t_1) = -\pi\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow v(t_1) = \frac{\pi\sqrt{21}}{2} = 7,198 \text{ cm/s} \tag{f}$

• accelerația:  $\begin{cases} \ddot{x}(t_1) = \frac{-3\sqrt{3}\pi^2}{2} \\ \ddot{y}(t_1) = -\pi^2 \end{cases} \Rightarrow a(t_1) = \frac{\pi^2 \sqrt{31}}{2} = 27,476 \text{ cm/s}^2 \tag{g}$

- raza de curbură a traiectoriei (a) se calculează cu ajutorul formulei:

$$\rho = \frac{\sqrt{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^3}}{|\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}|} \quad (h)$$

Raza de curbură la momentul  $t_1=1/3 s$  este:

$$\rho(t_1) = \frac{7\sqrt{21}}{16} = 2,005 \text{ cm} \quad (i)$$

**8.3 Același enunț ca la problema 8.2, cu următoarele date :**

$$\vec{r} = \overline{OM} = \left(2 + \sin \frac{\pi}{3}t\right)\vec{i} + \left(1 + 2\cos \frac{\pi}{3}t\right)\vec{j}, \text{ cm ; momentul } t_1=1 \text{ s;}$$

**Rezolvare :**

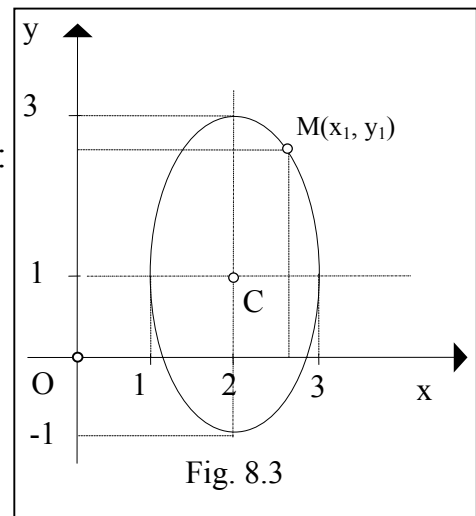
1) Ecuațiile sub formă parametrică ale traiectoriei sunt :

$$\begin{cases} x = 2 + \sin \frac{\pi}{3}t \\ y = 1 + 2\cos \frac{\pi}{3}t \end{cases} \text{ sau: } \begin{cases} x - 2 = \sin \frac{\pi}{3}t \\ \frac{y - 1}{2} = \cos \frac{\pi}{3}t \end{cases} \quad (a)$$

Ridicând la pătrat relațiile (a) și însumând membru cu membru, se obține ecuația sub formă implicită a traiectoriei în sistemul Oxy:

$$(x - 2)^2 + \left(\frac{y - 1}{2}\right)^2 - 1 = 0 \quad (b)$$

care reprezintă o elipsă având centrul:  $C(2, 1)$  de semiaxe:  $a=1, b=2$  (fig. 8.3).



2) Poziția, viteza, și accelerația punctului la momentul  $t$  și la momentul  $t_1=1s$  sunt:

- Poziția

$$\begin{cases} x = 2 + \sin \frac{\pi}{3}t \\ y = 1 + 2\cos \frac{\pi}{3}t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(t_1) = 2 + \frac{\sqrt{3}}{2} = 2,866 \text{ cm} \\ y(t_1) = 2 \text{ cm} \end{cases} \quad (c)$$

- Viteza:

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{\pi}{3}\cos \frac{\pi}{3}t \\ \dot{y} = -\frac{2\pi}{3}\sin \frac{\pi}{3}t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v(t) = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \frac{\pi}{3}\sqrt{1 + 3\sin^2 \frac{\pi}{3}t} \\ v(t_1) = \pi\sqrt{13}/6 = 1,888 \text{ cm/s} \end{cases} \quad (d)$$

- Accelerația:

$$\begin{cases} \ddot{x} = -\frac{\pi^2}{9} \sin \frac{\pi}{3} t \\ \ddot{y} = -\frac{2\pi^2}{9} \cos \frac{\pi}{3} t \end{cases} \Rightarrow a = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2} = \frac{\pi^2}{9} \sqrt{1 + 3 \cos^2 \frac{\pi}{3} t} \quad (e)$$

$$\Rightarrow a(t_1) = \frac{\pi^2 \sqrt{7}}{18} = 1,451 \text{ cm/s}^2$$

- Raza de curbură a traiectoriei punctului la momentul  $t_1 = 1 \text{ s}$  este:

$$\rho(t) = \frac{\sqrt{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^3}}{|\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}|}; \quad \rho(t_1) = \frac{13\sqrt{13}}{16} = 2,929 \text{ cm} \quad (f)$$

**8.4. Se consideră mecanismul bielă-manivelă din figura 8.4, pentru care se cunosc:**  $OA = r$ ,  $AB = \ell$ ,  $MB = \ell/3$  și legea de mișcare a manivelei OA:  $\varphi(t) = 3\pi t$ .

**Se cer:** 1) Ecuația traiectoriei punctului M sub formă parametrică și explicită;  
2) Poziția, viteza, accelerația punctului și raza de curbură a traiectoriei la momentul  $t_1 = 1/6 \text{ s}$ , dacă se cunosc valorile numerice:  $r = 10 \text{ cm}$ ,  $\ell = 30 \text{ cm}$

**Rezolvare :**

Se notează cu  $\alpha$  unghiul OBA (fig. 8.4). Coordonatele punctului M față de axele sistemului Oxy sunt:

$$\begin{cases} x_M = OA' + A'M' = r \sin \varphi + \frac{2}{3} \ell \cos \alpha \\ y_M = M'M = \frac{\ell}{3} \sin \alpha \end{cases} \quad (a)$$

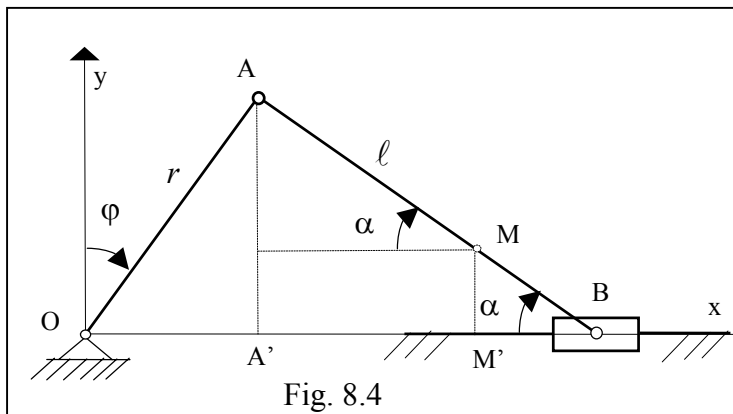


Fig. 8.4

Teorema sinusurilor în triunghiul OAB se scrie:

$$\frac{l}{\sin(90^\circ - \varphi)} = \frac{r}{\sin \alpha}$$

$$\Rightarrow \sin \alpha = \frac{r}{\ell} \cos \varphi$$

$$\Rightarrow \cos \alpha = \sqrt{1 - \frac{r^2}{\ell^2} \cos^2 \varphi}$$

Prin urmare, ecuațiile parametrice (a) devin:

$$\begin{cases} x = r \sin \varphi + \frac{2}{3} \sqrt{\ell^2 - r^2 \cos^2 \varphi} \\ y = \frac{r}{3} \cos \varphi \end{cases} \quad (\text{a})$$

Eliminând parametrul  $\varphi$  din ecuațiile parametrice (a'), se obține ecuația explicită a traiectoriei punctului M în sistemul de axe Oxy:

$$x = \sqrt{r^2 - 9y^2} + \frac{2}{3} \sqrt{\ell^2 - 9y^2} \quad (\text{b})$$

2) Poziția, viteza, accelerația punctului și raza de curbură la momentul  $t_1 = 1/6$  s, ( $\varphi = \pi/2$ ,  $\dot{\varphi} = 3\pi$ ;  $\ddot{\varphi} = 0$ ) se determină astfel:

$$\bullet \begin{cases} x = r \sin \varphi + \frac{2}{3} \sqrt{\ell^2 - r^2 \cos^2 \varphi} \\ y = \frac{r}{3} \cos \varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(t_1) = r + \frac{2\ell}{3} = 30 \text{ cm} \\ y(t_1) = 0 \end{cases} \quad (\text{c})$$

$$\bullet \begin{cases} \dot{x} = \dot{\varphi} r \left( \cos \varphi + \frac{r}{3} \cdot \frac{\sin 2\varphi}{\sqrt{\ell^2 - r^2 \cos^2 \varphi}} \right) \\ \dot{y} = -\dot{\varphi} r \left( \frac{1}{3} \sin \varphi \right) \end{cases} \quad (\text{d})$$

$$\begin{cases} \dot{x}(t_1) = 0 \\ \dot{y}(t_1) = -\pi r \end{cases} \Rightarrow v(t_1) = 31,416 \text{ cm/s}$$

$$\bullet \begin{cases} \ddot{x} = \dot{\varphi}^2 r \left( -\sin \varphi + \frac{r}{6} \cdot \frac{4 \cos 2\varphi (\ell^2 - r^2 \cos^2 \varphi) - r^2 \sin^2 2\varphi}{\sqrt{(\ell^2 - r^2 \cos^2 \varphi)^3}} \right) \\ \ddot{y} = -\dot{\varphi}^2 r \left( \frac{1}{3} \cos \varphi \right) \quad (\text{deoarece } \ddot{\varphi} = 0) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \ddot{x}(t_1) = 9\pi^2 r \left( -1 - \frac{2r}{3\ell} \right) \\ \ddot{y}(t_1) = 0 \end{cases} \Rightarrow a(t_1) = 220 \text{ cm/s}^2 \quad (\text{e})$$

• Raza de curbură a traiectoriei punctului momentul  $t_1 = 1/6$  s este:

$$\rho(t) = \frac{\sqrt{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^3}}{|\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}y|}; \quad (\text{f})$$

$$\rho(t_1) = \frac{13\sqrt{13}}{16} = 4,486 \text{ cm}$$



**8.5. Se consideră mecanismul** format din două pistoane și o bielă (fig. 8.5), pentru care se cunosc  $AB = \ell$ ,  $AM = 2\ell/3$  și legea de mișcare a pistonului B:

$$OB = s(t) = 10\sqrt{3} \cos \pi t .$$

**Se cer:**

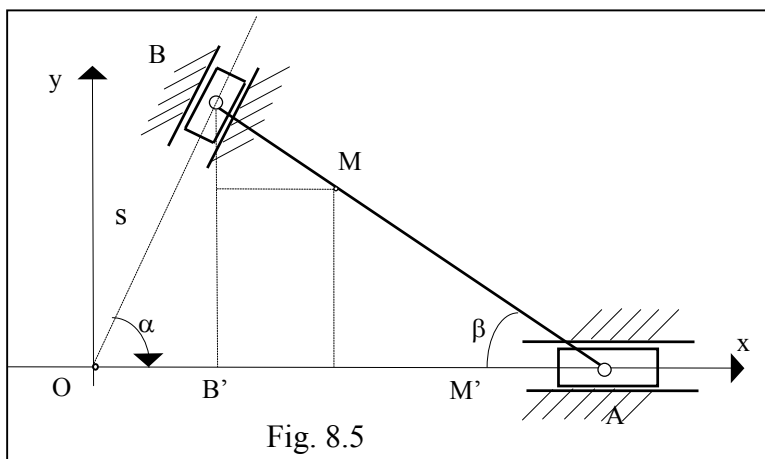
- 1) Ecuațiile sub formă parametrică și implicită a traiectoriei punctului M al bielei
- 2) Poziția, viteza, accelerația punctului și raza de curbură la momentul  $t_1 = 1/3$  s, dacă se cunosc valorile numerice:  $\alpha = \pi/3$ ,  $\ell = 30\text{cm}$ .

**Rezolvare :**

Se notează unghiurile:  $BOA = \alpha$  și  $OAB = \beta$  (fig. 8.5)

Ecuațiile sub formă parametrică ale traiectoriei punctului M al bielei sunt:

$$\begin{cases} x_M = OM' = OB' + B'M' = s \cos \alpha + \frac{\ell}{3} \cos \beta \\ y_M = M'M = \frac{2\ell}{3} \sin \beta \end{cases} \quad (a)$$



Din teorema sinusurilor scrisă în triunghiul OAB, avem:

$$\frac{s}{\sin \beta} = \frac{\ell}{\sin \alpha}$$

$$\Rightarrow \sin \beta = \frac{s}{\ell} \sin \alpha;$$

$$\Rightarrow \cos \beta = \sqrt{1 - \frac{s^2}{\ell^2} \sin^2 \alpha}$$

Ecuațiile parametricale ale traiectoriei punctului M se scriu:

$$\begin{cases} x = s \cdot \cos \alpha + \frac{1}{3} \sqrt{\ell^2 - s^2 \sin^2 \alpha} \\ y = \frac{2}{3} s \cdot \sin \alpha \end{cases} \quad (a')$$

Eliminând parametrul  $s$  din ecuațiile (a') se obține ecuația explicită a traiectoriei punctului M :

$$x = \frac{1}{2} \sqrt{4s^2 - 9y^2} + \frac{1}{6} \sqrt{4\ell^2 - 9y^2} \quad (b)$$

- 2) Poziția, viteza, accelerația punctului și raza de curbură la momentul  $t_1 = 1/3$  s, ( $\varphi = \pi/3$  s;  $s(t_1) = 10\sqrt{3} \cdot \cos \pi/3 = 5\sqrt{3}$  cm;  $\dot{s}(t_1) = -10\sqrt{3}\pi \cdot \sin \pi/3 = -15\pi$  cm/s  $\ddot{s}(t_1) = -10\sqrt{3}\pi^2 \cdot \cos \pi/3 = -5\sqrt{3}\pi^2$  cm/s<sup>2</sup>) se determină astfel:

- Poziția:

$$\begin{cases} x = s \cdot \cos \alpha + \frac{1}{3} \sqrt{\ell^2 - s^2 \sin^2 \alpha} \\ y = s \cdot \left( \frac{2}{3} \sin \alpha \right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(t_1) = 14,013 \text{ cm} \\ y(t_1) = 5 \text{ cm} \end{cases} \quad (\text{c})$$

- Viteza:

$$\begin{cases} \dot{x} = \dot{s} \left( \cos \alpha - \frac{s \cdot \sin^2 \alpha}{3 \sqrt{\ell^2 - s^2 \sin^2 \alpha}} \right) \\ \dot{y} = \dot{s} \cdot \left( \frac{2}{3} \cos \alpha \right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}(t_1) = -20,05 \text{ cm/s} \\ \dot{y}(t_1) = -15,7 \text{ cm/s} \\ v(t_1) = 25,465 \text{ cm/s} \end{cases} \quad (\text{d})$$

- Accelerația:

$$\begin{cases} \ddot{x} = \ddot{s} \cdot \left( \cos \alpha - \frac{s \cdot \sin^2 \alpha}{3 \sqrt{\ell^2 - s^2 \sin^2 \alpha}} \right) - \dot{s}^2 \frac{\ell^2 \sin^2 \alpha}{3 \sqrt{(\ell^2 - s^2 \sin^2 \alpha)^3}} \\ \ddot{y} = \ddot{s} \cdot \left( \frac{2}{3} \cos \alpha \right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{x}(t_1) = -72,6 \text{ cm/s}^2 \\ \ddot{y}(t_1) = -28,49 \text{ cm/s}^2 \end{cases} \Rightarrow a(t_1) = 77,99 \text{ cm/s}^2 \quad (\text{e})$$

- Raza de curbură a traiectoriei punctului momentul  $t_1=1 \text{ s}$  este:

$$\rho(t) = \frac{\sqrt{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^3}}{|\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}y|}; \quad \rho(t_1) = 29,044 \text{ cm} \quad (\text{f})$$

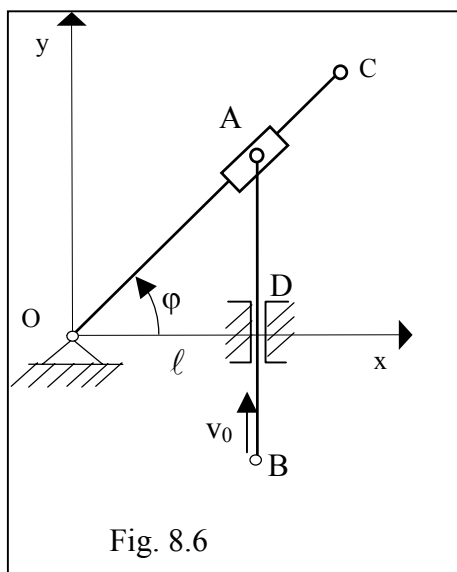


Fig. 8.6

**8.6. Se consideră mecanismul format din două bare OC și AB (O =articulație fixă) și două culise: prima mobilă în A și a doua fixă în D (fig. 8.6), pentru care se cunosc  $OC=a$ ,  $OD = \ell$  și legea de mișcare a barei AB:  $s=DA=v_0 t$ .**

**Se cer:**

1) Ecuațiile sub formă parametrică și implicită a traiectoriei punctul C al bielei.

2) Poziția, viteza și accelerația punctului C pentru poziția particulară  $\varphi=\pi /4$ , dacă se cunosc valorile numerice:

$$a = 10 \text{ cm}, \quad \ell = 30 \text{ cm}, \quad v_0 = 30 \text{ cm/s}.$$

**Rezolvare :**

Coordonatele punctului C față de axele sistemului Oxy sunt:

$$\begin{cases} x_C = a \cos \varphi \\ y_C = a \sin \varphi \end{cases} \quad (\text{a})$$

Este evident faptul că punctul C descrie cercul de rază  $a$  :  $x_C^2 + y_C^2 = a^2$

Din triunghiul OAD rezultă :

$$\cos \varphi = \frac{OD}{DA} = \frac{\ell}{\sqrt{\ell^2 + (v_0 t)^2}}; \quad \sin \varphi = \frac{OD}{DA} = \frac{v_0 t}{\sqrt{\ell^2 + (v_0 t)^2}}.$$

Deci ecuațiile parametrice ale punctului C sunt:

$$\begin{aligned} x_C &= \frac{a\ell}{\sqrt{\ell^2 + (v_0 t)^2}}; \\ y_C &= \frac{av_0 t}{\sqrt{\ell^2 + (v_0 t)^2}}. \end{aligned} \quad (\text{b})$$

Viteza punctului C se obține derivând expresiile (b):

$$\begin{aligned} \dot{x}_C &= \frac{-av_0^2 t}{\left(\sqrt{\ell^2 + (v_0 t)^2}\right)^3}; \\ \dot{y}_C &= \frac{av_0 \ell^2}{\left(\sqrt{\ell^2 + (v_0 t)^2}\right)^3}; \quad \Rightarrow v = \sqrt{\dot{x}_C^2 + \dot{y}_C^2} = \frac{av_0 \ell}{\ell^2 + (v_0 t)^2} \end{aligned} \quad (\text{c})$$

Acceleatația punctului C se obține prin derivarea vitezei

$$a = |\dot{v}| = \frac{2av_0^3 t}{\left(\ell^2 + (v_0 t)^2\right)^2} \quad (\text{d})$$

Viteza și accelerația punctului C pentru poziția particulară  $\varphi = \pi/4$ , adică

pentru  $\cos \varphi = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\ell}{\sqrt{\ell^2 + (v_0 t)^2}} \quad \Rightarrow t_1 = \frac{\ell}{v_0}$  și au valorile următoare:

$$v(t_1) = \frac{av_0 \ell}{\ell^2 + (v_0 t_1)^2} = \frac{av_0}{2\ell} = 5 \text{ cm/s} \quad (\text{e})$$

$$a(t_1) = \frac{2av_0^3 t_1}{\left(\ell^2 + (v_0 t_1)^2\right)^2} = \frac{av_0^2}{2\ell^2} = 5 \text{ cm/s}^2 \quad (\text{f})$$

**8.7. Se consideră** bara  $AB$  ce alunecă cu extremitățile sale  $A$  și  $B$  după direcțiile axelor  $Ox$  și  $Oy$  ca figura 8.7, astfel încât punctul  $B$  se deplasează spre originea  $O$  cu viteza  $v_0 = v_B = \text{constant}$ . **Se cer:**

1) Ecuația traiectoriei punctului  $M$  al barei, știind că  $MA = a$ ,  $MB = b$ .

2) Poziția, viteza și accelerația punctului pentru  $\varphi_1 = \pi/6$  s, dacă se cunosc valorile numerice pentru:  $a = 20\text{cm}$ ,  $b = 10\text{cm}$ ,  $v_0 = 5\text{cm/s}$

**Rezolvare :**

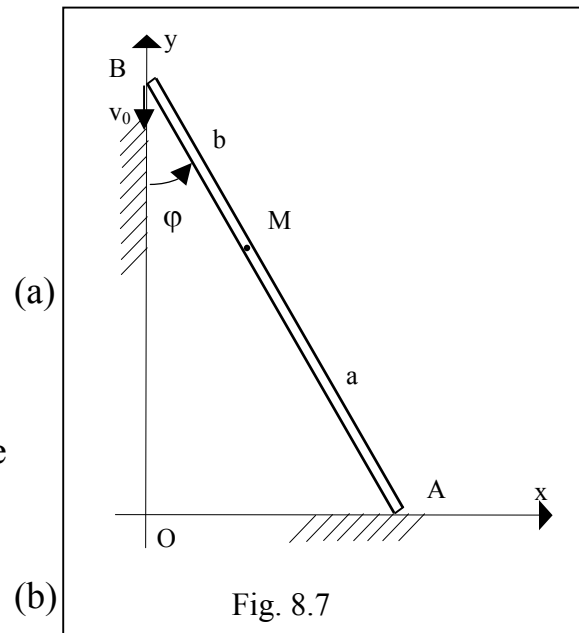
Se notează cu  $\varphi$  unghiul  $OBA$

(fig. 8.7). Coordonatele punctului  $M$  față de axele sistemului  $Oxy$  sunt:

$$\begin{cases} x_M = b \sin \varphi \\ y_M = a \cos \varphi \end{cases}$$

Eliminând parametrul  $\varphi$  se obține ecuația traiectoriei sub forma unei elipse cu centrul în  $O$ , de semiaxe  $b$  și  $a$ :

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} - 1 = 0$$



Componentele vitezei și accelerației punctului  $M$  se obțin prin derivarea relațiilor (a):

$$\begin{cases} \dot{x}_M = b\dot{\varphi} \cdot \cos \varphi \\ \dot{y}_M = -a\dot{\varphi} \cdot \sin \varphi \end{cases} \quad (c)$$

$$\begin{cases} \ddot{x}_M = -b\dot{\varphi}^2 \cdot \sin \varphi + b\ddot{\varphi} \cdot \cos \varphi \\ \ddot{y}_M = -a\dot{\varphi}^2 \cdot \cos \varphi - a\ddot{\varphi} \cdot \sin \varphi \end{cases}$$

Pentru a determina mărimile vitezei unghiulare  $\dot{\varphi}$  și accelerație unghiulare  $\ddot{\varphi}$  se exprimă componentele vitezei punctului  $B$  în funcție de parametrul  $\varphi$ :

$$\begin{cases} x_B = 0 \\ y_B = (a + b) \cos \varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_B = 0 \\ \dot{y}_B = -(a + b) \cdot \dot{\varphi} \cdot \sin \varphi \end{cases} \quad (d)$$

$$\Rightarrow \dot{\varphi} = \frac{v_0}{(a + b) \sin \varphi}$$

Dacă se derivează în raport cu timpul viteza unghiulară  $\dot{\varphi}$  se obține:

$$\ddot{\varphi} = -\frac{v_0^2}{(a + b)^2} \frac{\cos \varphi}{\sin^3 \varphi} \quad (e)$$

Înlocuind (d) și (e) în relațiile (c) se obține:

$$\begin{cases} \dot{x}_M = \frac{bv_0}{a+b} \operatorname{ctg}\varphi \\ \dot{y}_M = -\frac{av_0}{a+b} (=ct) \end{cases} \Rightarrow v_M = \frac{v_0}{a+b} \sqrt{a^2 + b^2 \operatorname{ctg}^2 \varphi} \quad (f)$$

$$\begin{cases} \ddot{x}_M = -b\dot{\varphi}^2 \cdot \sin \varphi + b\ddot{\varphi} \cdot \cos \varphi = -\frac{bv_0^2}{(a+b)^2 \sin^3 \varphi} \\ \ddot{y}_M = -a\dot{\varphi}^2 \cdot \cos \varphi - a\ddot{\varphi} \cdot \sin \varphi = 0 \end{cases} \quad (g)$$

$$\Rightarrow a_M = \frac{bv_0^2}{(a+b)^2 \sin^3 \varphi}$$

Poziția , viteza și accelerația punctului M pentru  $\varphi_1 = \pi/6$  sunt:

$$\begin{cases} x_M = b \sin \varphi_1 = 5 \text{ cm} \\ y_M = a \cos \varphi_1 = 17,32 \text{ cm} \end{cases}$$

$$v_M(\varphi_1) = \frac{v_0}{a+b} \sqrt{a^2 + b^2 \operatorname{ctg}^2 \varphi_1} = 4,41 \text{ cm/s}$$

$$a_M(\varphi_1) = \frac{bv_0^2}{(a+b)^2 \sin^3 \varphi_1} = 2,22 \text{ cm/s}^2 \quad (h)$$

**Observație :**

La același rezultat dat de relațiile (g) se poate ajunge derivând relațiile (f):

$$\begin{cases} \ddot{x}_M = \frac{bv_0}{a+b} (\operatorname{ctg}\varphi)' = \frac{bv_0}{a+b} \cdot \frac{(-\dot{\varphi})}{\sin^2 \varphi} = -\frac{bv_0^2}{(a+b)^2 \sin^3 \varphi} \\ \ddot{y}_M = 0 \end{cases}$$

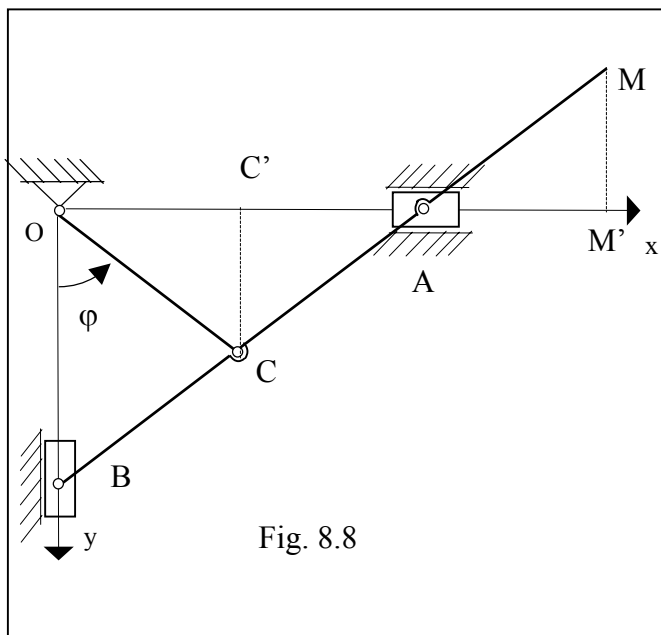


Fig. 8.8

**8.8. Se consideră mecanismul format din două bare articulate OC și AB și două culise: prima culisă din A după axa Ox și a doua culisă din B după axa Oy (fig. C1.8), unde  $OC=AC=CB=AM=l$  și legea de mișcare a barei OC,  $\varphi(t)=3\pi$  (rad).**

**Se cer:** 1) Ecuațiile sub formă parametrică și implicită a traiectoriei punctului M. 2) Viteza și accelerația punctului M la momentul  $t_1=1/9$  s dacă se cunoaște valoarea pentru  $l = 30\text{cm}$

**Rezolvare :**

Coordonatele punctului M sunt:

$$\begin{cases} x_M = 3\ell \cdot \sin \varphi \\ y_M = -\ell \cdot \cos \varphi \end{cases} \quad (\text{a})$$

Ridicând la pătrat relațiile (a) și însumând membru cu membru, se obține ecuația traiectoriei sub formă implicită:

$$\left(\frac{x}{3}\right)^2 + y^2 - \ell^2 = 0 \quad (\text{b})$$

care reprezintă o elipsă având centrul în origine și semiaxele:  $a = 3\ell$ ;  $b = \ell$

Deci ecuațiile parametrice ale punctului M sunt:

$$\begin{cases} x_M = 3\ell \cdot \sin 3\pi t \\ y_M = -\ell \cdot \cos 3\pi t \end{cases} \quad (\text{c})$$

Viteza punctului M:

$$\begin{cases} \dot{x}_M = 9\pi\ell \cdot \cos 3\pi t \\ \dot{y}_M = 3\pi\ell \cdot \sin 3\pi t \end{cases} \quad (\text{d})$$

$$v(t) = \sqrt{\dot{x}_M^2 + \dot{y}_M^2} = 3\pi\ell \sqrt{1 + 8\cos^2 3\pi t}$$

Accelerația punctului M:

$$\begin{cases} \ddot{x}_M = -27\pi^2\ell \cdot \sin 3\pi t \\ \ddot{y}_M = 9\pi^2\ell \cdot \sin 3\pi t \end{cases} \quad (\text{e})$$

$$\Rightarrow a(t) = \sqrt{\ddot{x}_M^2 + \ddot{y}_M^2} = 9\pi^2\ell \cdot \sqrt{1 + 8\sin^2 3\pi t}$$

Poziția, viteza și accelerația punctului M la momentul  $t_1 = 1/9$  s, sunt :

$$\begin{cases} x_M(t_1) = 3\ell \cdot \sin 3\pi t_1 = 77,942 \text{ cm} \\ y_M(t_1) = -\ell \cdot \cos 3\pi t_1 = -15 \text{ cm} \end{cases}$$

$$v(t_1) = \sqrt{\dot{x}_M^2 + \dot{y}_M^2} = 3\pi\ell \cdot \sqrt{1 + 8\cos^2 3\pi t} = 489,726 \text{ cm/s} \quad (\text{f})$$

$$a(t_1) = 9\pi^2\ell \cdot \sqrt{1 + 8\sin^2 3\pi t} = 7050,38 \text{ cm/s}^2$$

**8.9. Se consideră mecanismul format din două bare articulate OC și AB și două culise: B după axa Ox și C după axa Oy (fig. C1.8), unde OA=AC=AB=ℓ și legea de mișcare a barei OC, φ(t)=ωt (ω=const).**

**Se cer: Viteza și accelerația punctelor B și C în funcție de t și la momentul t<sub>1</sub>=1/18 s dacă se cunoaște valoarea lungimii ℓ=10cm și ω=3π rad/s.**

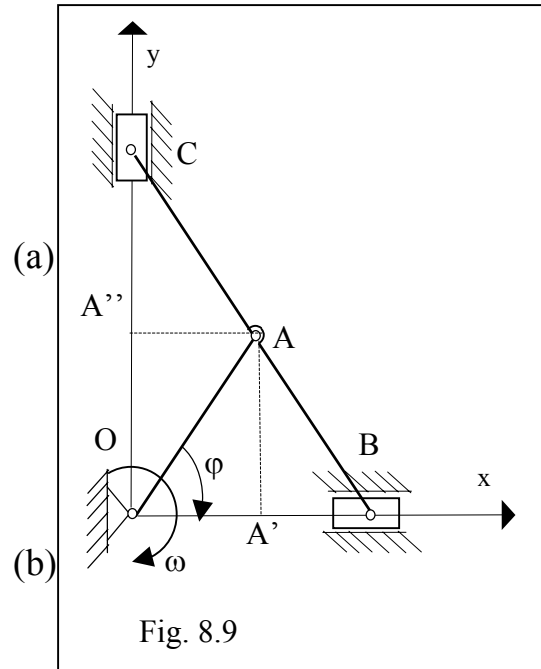
**Rezolvare :**

Coordonatele punctelor B și C sunt:

$$\begin{cases} x_B = 2\ell \cdot \cos \omega t \\ y_B = 0 \\ x_C = 0 \\ y_C = 2\ell \cdot \sin \omega t \end{cases}$$

Viteza punctelor B și C sunt:

$$\begin{cases} \dot{x}_B = -2\ell\omega \cdot \sin \omega t & \Rightarrow v_B = 2\ell\omega \cdot \sin \omega t \\ \dot{y}_B = 0 \\ \dot{x}_C = 0 \\ \dot{y}_C = 2\ell\omega \cdot \cos \omega t & \Rightarrow v_C = 2\ell\omega \cdot \cos \omega t \end{cases}$$



Accelerația punctelor B și C sunt:

$$\begin{cases} \ddot{x}_B = -2\ell\omega^2 \cdot \cos \omega t & \Rightarrow a_B = 2\ell\omega^2 \cdot \cos \omega t \\ \ddot{y}_B = 0 \\ \ddot{x}_C = 0 \\ \ddot{y}_C = -2\ell\omega^2 \cdot \sin \omega t & \Rightarrow a_C = 2\ell\omega^2 \cdot \sin \omega t \end{cases} \quad (c)$$

Poziția, viteza și accelerația punctelor B și C la momentul t<sub>1</sub>=1/18 s, sunt :

$$\begin{cases} x_B = 2\ell \cdot \cos \pi / 6 = 17,32 \text{ cm} \\ y_B = 0 \\ x_C = 0 \\ y_C = 2\ell \cdot \sin \pi / 6 = 10 \text{ cm} \end{cases} \quad (d)$$

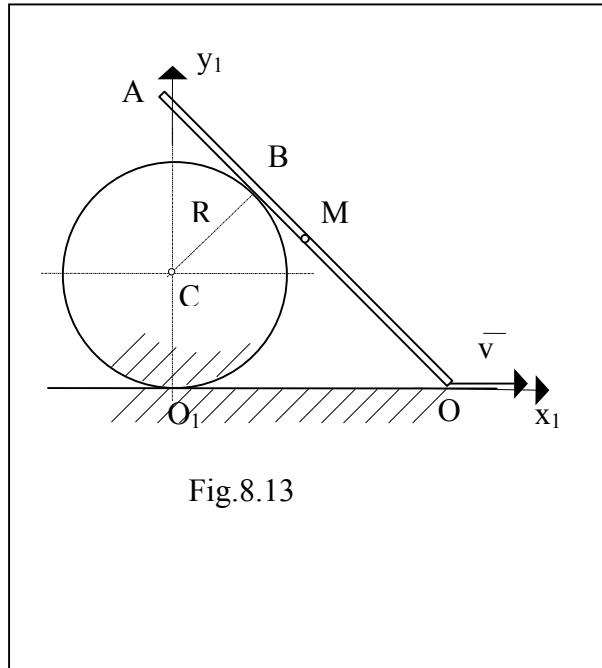
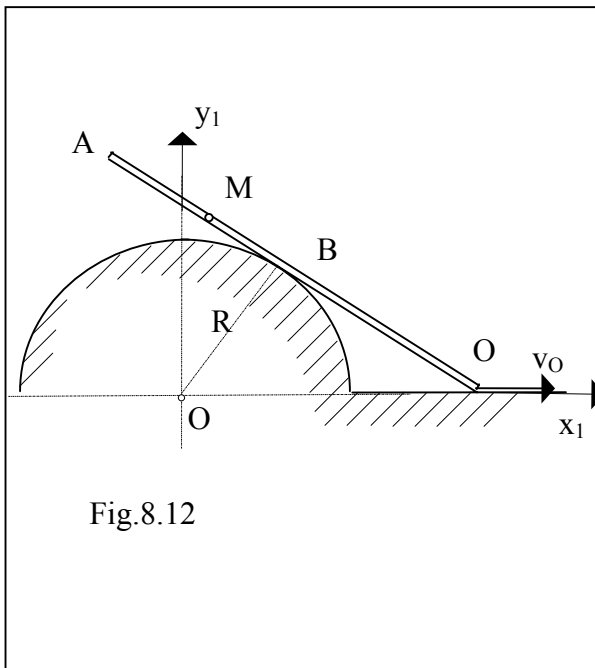
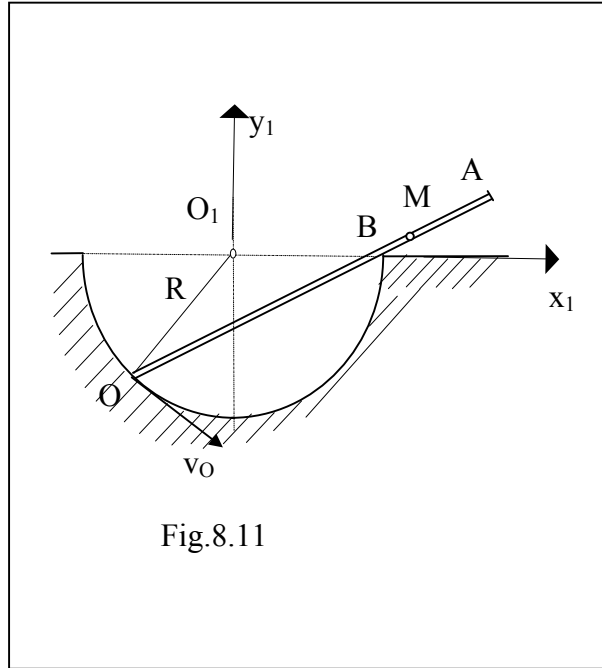
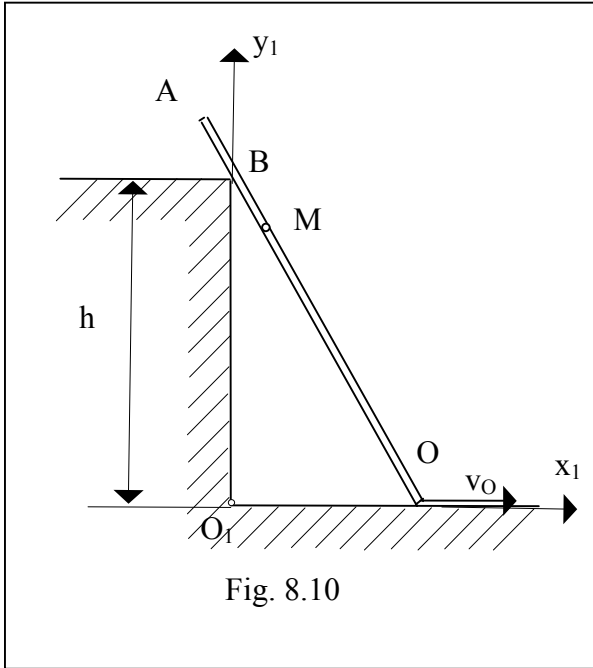
$$\begin{cases} v_B = 2\ell\omega \cdot \sin \pi / 6 = 94,25 \text{ cm / s} \\ v_C = 2\ell\omega \cdot \cos \pi / 6 = 163,24 \text{ cm / s} \end{cases} \quad (e)$$

$$\begin{cases} a_B = 2\ell\omega^2 \cdot \cos \pi / 6 = 1538,52 \text{ cm / s}^2 \\ a_C = 2\ell\omega^2 \cdot \sin \pi / 6 = 888,26 \text{ cm / s}^2 \end{cases} \quad (f)$$

**PROBLEME PROPUSE**

**8.10 ... 8.13.** *Se consideră bara AB ce alunecă ca figură (fig. 8.10 ... 8.13), astfel încât punctul B rămâne permanent în contact cu muchia/suprafața cilindrică iar punctul O se deplasează cu viteza  $v_0 = \text{constant}$ . Se cer:*

- 1) *Ecuția traiectoriei punctului M al barei, cunoscând  $h$ ,  $R$ ,  $MA = a$ ,  $MB = b$ .*
- 2) *Poziția, viteza și accelerația punctului la momentul  $t$ .*





## CAPITOLUL IX

### DINAMICA PUNCTULUI MATERIAL

**9.1. Se consideră** un punct material de masă  $m$  care se deplasează pe o suprafață orizontală  $A_0A_1 = L$ , cu frecare ( $\mu \neq 0$ ), pornind din  $A_0$  cu viteza inițială  $v_0$  dată. (fig. 9.1.a) **Se cere:** Să se studieze mișcarea pe  $A_0A_1$ , determinându-se viteza în  $A_1$  ( $v_{A_1} = v_1$ ), folosind atât ecuația de mișcare cât și teorema de variației a energiei cinetice.

**Rezolvare:**

Se alege sistemul de axe  $Oxy$  cu originea în  $A_0$  și axa  $Ox$  pe orizontală, ca în fig. 9.1.b. Ecuația vectorială de mișcare pe  $A_0A_1$  se scrie:

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{G} + \vec{N} + \vec{T} \quad (a)$$

care proiectată pe axele  $x$  și  $y$  conduce la

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -T \\ m\ddot{y} = -mg + N \end{cases} \quad (b)$$

la care se asociază condiția geometrică:

$$y = 0 \quad (\ddot{y} = 0), \quad (c)$$

și condiția fizică a frecării:

$$T = \mu N, \quad (d)$$

Ținând seama de condiția (c), din a doua ecuație (b) se obține:  $N = mg$

Ținând seama de condiția (d), dacă înlocuim în prima ecuație (b) se obține:

$$\ddot{x} = -\mu g \Rightarrow \dot{x} = -\mu g t + C_1 \Rightarrow x = -\mu g \frac{t^2}{2} + C_1 t + C_2 \quad (e)$$

Punând condițiile inițiale la momentul  $t = 0 \Rightarrow x(0) = 0, \dot{x}(0) = v_0$  se obțin constantele de integrare din (e):  $C_1 = v_0, C_2 = 0$ . Deci legile de mișcare sunt:

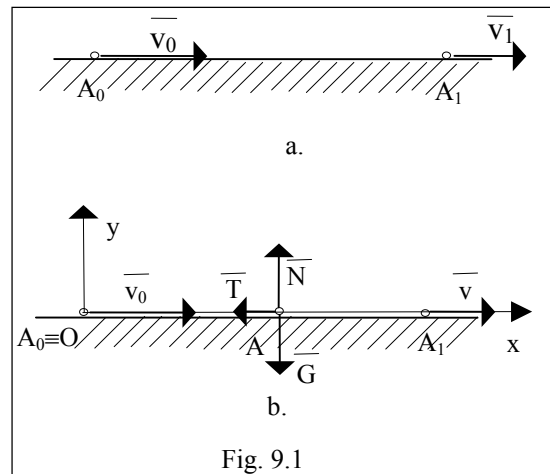
$$x(t) = -\mu g \frac{t^2}{2} + v_0 t, \quad v(t) = -\mu g t + v_0 \quad (f)$$

Eliminând parametrul  $t$  se obține:  $v(x) = \sqrt{v_0^2 - 2\mu g x} \quad (g)$

Pentru  $x = x_{A_1} = L$ , se obține viteza din  $A_1$ :  $v_1 = \sqrt{v_0^2 - 2\mu g L} \quad (h)$

Iar din teorema energiei cinetice :  $E_1 - E_0 = L_{0-1}$  adică

$$\frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \int_0^L X dx = -\mu mgL, \quad \text{și se obține aceeași expresie pentru } v_1.$$



**9.2. Se consideră un punct material de masă  $m$  care se deplasează pe un plan înclinat cu unghiul  $\alpha$ , cu frecare ( $\mu \neq 0$ ), pe linia de cea mai mare pantă, pornind din  $A_0$  cu viteza inițială  $v_0$  dată (fig. 9.2.a). Se cere:**

- 1) Să se determine legea de mișcare la urcare și să se determine distanța  $A_0A_1=L$  (în  $A_1$  punctul material se oprește), folosind atât ecuația de mișcare cât și teorema de variației a energiei cinetice.
- 2) Să se determine legea de mișcare la coborâre dacă  $\mu < \operatorname{tg}\alpha$  și să se determine viteza cu care trece prin  $A_0$ , folosind atât ecuația de mișcare cât și teorema de variației a energiei cinetice.

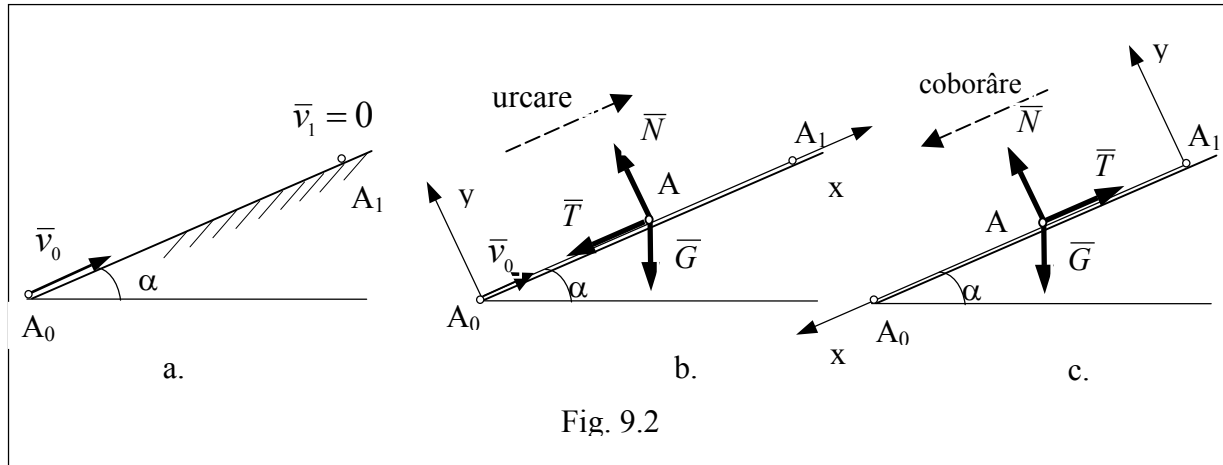


Fig. 9.2

**Rezolvare:**

- 1) În cazul urcării pe planul înclinat, se alege sistemul de axe  $Oxy$  cu originea în  $A_0$  și axa  $Ox$  pe direcția planului în sensul mișcării, ca în fig. 9.2.b și se eliberează punctul de legături introducându-se forțele de legătură  $\vec{N}$  și  $\vec{T}$  ( $T = \mu N$ ) (conform axiomei legăturilor).

Ecuția diferențială a mișcării pe  $A_0A_1$ , în proiecții pe axe se scrie:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -mg\sin\alpha - T; \\ m\ddot{y} &= -mg\cos\alpha + N, \end{aligned} \tag{a}$$

Ecuția traiectoriei (condiția geometrică) este:

$$y = 0 \quad (\dot{y} = 0; \quad \ddot{y} = 0) \tag{b}$$

$$\text{Condiția fizică a frecării este:} \quad T = \mu N, \tag{c}$$

care introduse în (a) conduce la:

$$\begin{aligned} N &= mg\cos\alpha \\ \ddot{x} &= -g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha) \end{aligned} \tag{d}$$

Integrând succesiv de două ori ultima ecuație (d), se obține:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)t + C_1, \\ x &= -\frac{1}{2}(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)gt^2 + C_1t + C_2. \end{aligned} \tag{e}$$

Dacă se introduc condițiile la momentul inițial  $t = 0$  :

$x(0) = 0, \dot{x}(0) = v_0$  rezultă constantele de integrare:  $C_1 = v_0, C_2 = 0$ .

Legea de mișcare este dată de:

$$x(t) = v_0 t - \frac{1}{2}(\sin \alpha + \mu \cos \alpha) g t^2 \quad (\text{f})$$

$$v(t) = \dot{x}(t) = v_0 - (\sin \alpha + \mu \cos \alpha) g t.$$

Eliminând parametrul  $t$  se obține:

$$v(x) = \sqrt{v_0^2 - 2xg(\sin \alpha + \mu \cos \alpha)} \quad (\text{g})$$

În punctul  $A_I$  deplasarea este  $x_{AI} = L$  și  $v_{AI} = 0$ , rezultă:

$$L = \frac{v_0^2}{2g(\sin \alpha + \mu \cos \alpha)}. \quad (\text{h})$$

Teorema energiei cinetice se scrie:

$$E_1 - E_0 = L_{0-1}$$

unde:  $E_1 = 0, \quad E_0 = \frac{1}{2} m v_0^2$

$$L_{0-1} = \int_{0-1} \bar{F} \cdot d\bar{r} = \int_{0-1} [(-G \sin \alpha - T)\bar{i} + (-G \cos \alpha + N)\bar{j}] \cdot (dx\bar{i})$$

$$L_{0-1} = (-G \sin \alpha - T)L$$

deoarece:  $T = \mu N, \quad N = G \cos \alpha,$

avem:  $L_{0-1} = -mgL(\sin \alpha + \mu \cos \alpha)$

Înlocuind în teorema energiei cinetice, obținem aceeași relație pentru  $L$ .

2) În cazul coborârii pe planul înclinat, se alege sistemul de axe  $Oxy$  cu originea în  $A_I$  și axa  $Ox$  pe direcția planului în sensul mișcării, ca în *fig. 9.2.c*, se introduc forțele de legătură  $\bar{N}$  și  $\bar{T}$ .

Ecuția diferențială a mișcării pe  $A_I A_0$ , în proiecții pe axe se scrie:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= mg \sin \alpha - T; \\ m\ddot{y} &= -mg \cos \alpha + N, \end{aligned} \quad (\text{i})$$

Ecuția traiectoriei (condiția geometrică) este:

$$y = 0 \quad (\dot{y} = 0; \quad \ddot{y} = 0) \quad (\text{j})$$

Condiția fizică a frecării este:  $T = \mu N,$  (\text{k})

care introduse în (i) conduce la:

$$\begin{aligned} N &= mg \cos \alpha \\ \ddot{x} &= g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha) \end{aligned} \quad (\text{l})$$

Integrând succesiv de două ori ultima ecuație (l), se obține:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)t + C_1, \\ x &= \frac{1}{2}(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)gt^2 + C_1t + C_2. \end{aligned} \quad (m)$$

Dacă se introduc condițiile la momentul inițial  $t = 0$  :

$$x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0 \text{ rezultă constantele de integrare: } C_1 = 0, C_2 = 0$$

Legea de mișcare este dată de:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2}(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)gt^2 \\ v(t) &= \dot{x}(t) = (\sin \alpha - \mu \cos \alpha)gt. \end{aligned} \quad (n)$$

Eliminând parametrul  $t$  se obține:

$$v(x) = \sqrt{2xg(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)} \quad (o)$$

În punctul  $A_0$  (la coborâre) deplasarea este  $x = L$  și viteza  $v_{A_0} = v'_0$ , rezultă:

$$v'_0 = \sqrt{2Lg(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)} \quad (p)$$

unde înlocuind valoarea lui  $L$  obținută cu relația (h) rezultă:

$$v'_0 = v_0 \sqrt{\frac{\sin \alpha - \mu \cos \alpha}{\sin \alpha + \mu \cos \alpha}} \quad (q)$$

Teorema de variație a energiei cinetice se scrie:

$$E_{A_0} - E_{A_1} = L_{A_1-A_0}$$

unde:  $E_{A_1} = 0$ ,  $E_{A_0} = \frac{1}{2}mv_0'^2$  (r)

$$L_{A_0-A_1} = \int_{0-1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{0-1} [(G \sin \alpha - T)\vec{i} + (-G \cos \alpha + N)\vec{j}] \cdot (dx\vec{i}) \quad (s)$$

$$L_{A_0-A_1} = (G \sin \alpha - T)L$$

Înlocuind în teorema energiei cinetice, obținem pentru  $v'_0$  aceeași expresie:

$$v'_0 = \sqrt{2Lg(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)} \quad (t)$$

### Observație:

Radicalul din relația (p) are sens dacă  $\sin \alpha - \mu \cos \alpha > 0$  adică  $\mu < \operatorname{tg} \alpha$  sau  $\varphi < \alpha$ , unde  $\varphi$  este unghiul de frecare ( $\varphi = \operatorname{arctg} \mu$ ). Această condiție este prevăzută în enunțul problemei.

**9.3. Se consideră** un punct material de masă  $m$  care se deplasează pe o suprafață cilindrică exterioară de rază  $R$ , fără frecare ( $\mu = 0$ ), pornind din  $A_0$  cu viteza inițială  $v_0$  (fig. 9.3.a).

**Se cere** să se studieze mișcarea pe  $A_0A_1$ , determinând viteza în  $A_1$  ( $v_{A1}$ ) când punctul material părăsește suprafața cilindrică, atât din ecuația de mișcare cât și din teorema de variației a energiei cinetice.

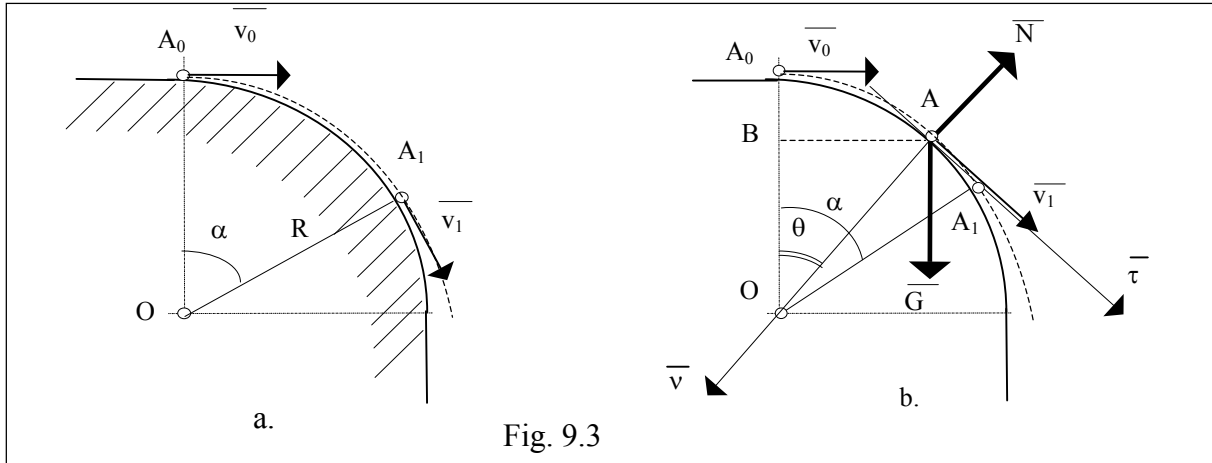


Fig. 9.3

**Rezolvare:**

Se alege sistemul de axe natural cu originea în  $A$ , ca în fig. 9.3.b. Ecuația vectorială de mișcare pe porțiunea cilindrică se scrie:

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{G} + \vec{N} \tag{a}$$

care proiectată pe axele sistemului natural se scriu:

$$\begin{cases} m\dot{v} = mg \sin \theta \\ m \frac{v^2}{\rho} = mg \cos \theta - N \end{cases} \tag{b}$$

unde înlocuind:  $\dot{v} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} = \frac{v}{R} \frac{dv}{d\theta}$

în prima ecuație din (b) se obține:

$$\frac{v}{R} \frac{dv}{d\theta} = g \sin \theta \quad \text{sau :} \quad v dv = Rg \sin \theta d\theta$$

Prin integrare se obține :  $\frac{v^2}{2} = -Rg \cos \theta + C$  (c)

Introducând condițiile inițiale:  $\theta(0)=0, v(0)=v_0$

se obține constanta de integrare:  $C = \frac{v_0^2}{2} + Rg$  ,

Legea de mișcare a punctului pe suprafața cilindrică se scrie:

$$v(\theta) = \sqrt{2Rg(1 - \cos \theta) + v_0^2} \tag{d}$$

Înlocuind (b) și  $\rho = R$  (condiția geometrică a mișcării) în ecuația a doua din (b) se obține reacțiunea normală:

$$N(\theta) = mg(3 \cos \theta - 2) - \frac{mv_0^2}{R} \quad (e)$$

Presupunând că în  $A_1$  punctul material părăsește suprafața cilindrică, se impun următoarele condiții:  $\theta = \alpha$ ,  $N = 0$  și  $v = v_1$ , deci relațiile (d) și (e) se scriu:

$$\begin{cases} v_1 = \sqrt{2Rg(1 - \cos \alpha) + v_0^2} \\ 0 = mg(3 \cos \alpha - 2) - \frac{mv_0^2}{R} \end{cases} \quad (f)$$

obținându-se:

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{v_0^2 + 2Rg}{3Rg}; \\ v_1 &= \sqrt{\frac{2Rg + v_0^2}{3}} \end{aligned} \quad (g)$$

Întrucât se impune condiția:  $0 < \cos \alpha = \frac{v_0^2 + 2Rg}{3Rg} \leq 1$ ,

rezultă:  $v_0 \leq \sqrt{Rg}$  (h)

Aceasta reprezintă condiția ca punctul material să nu părăsească suprafața cilindrică încă din punctul  $A_0$ .

Determinarea vitezei  $v_1$  aplicând teorema de variație a energiei cinetice. Aceasta se scrie:

$$E_1 - E_0 = L_{0-1} \quad (i)$$

unde:  $E_0 = \frac{1}{2}mv_0^2$ ;  $E_1 = \frac{1}{2}mv_1^2$ ;

$$L_{0-1} = \int_{0-1} (\overline{G} + \overline{N}) \cdot d\vec{r} = \int_{0-1} GR \sin \theta d\theta = -GR \cos \theta \Big|_0^\alpha = GR(1 - \cos \alpha) \quad (j)$$

sau (vezi fig. 9.3.b):

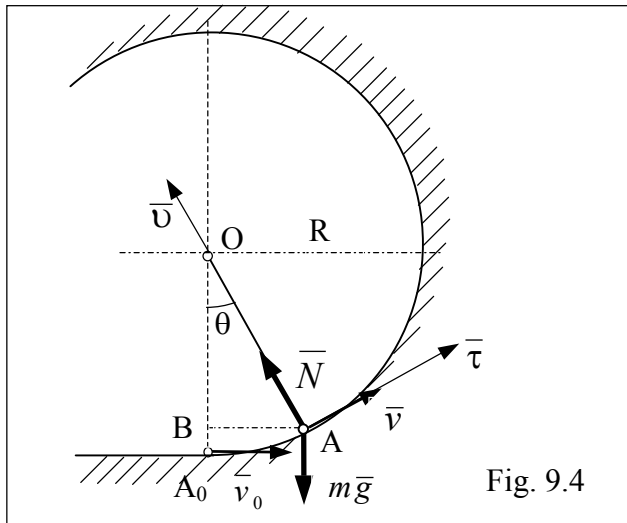
$$L_{A_0-A_1} = L_{A_0-B} + L_{B-A_1} = L_{A_0-B} + 0 = mg(A_0O - BO) = mgR(1 - \cos \alpha)$$

Aceasta semnifică faptul că lucrul mecanic nu depinde de drumul parcurs de punctul material, forța de greutate fiind o forță conservativă.

Înlocuind în (i) rezultă viteza punctului când părăsește suprafața cilindrică:

$$v_1 = \sqrt{v_0^2 + 2Rg(1 - \cos \alpha)}$$

**9.4. Se consideră** un punct material de masă  $m$  care se deplasează pe o suprafață cilindrică interioară de rază  $R$ , fără frecare ( $\mu = 0$ ), pornind din  $A_0$  cu viteza inițială  $v_0$  (fig. 9.4.)



**Se cere** să se studieze mișcarea determinând viteza și reacțiunea din punctul A atât din ecuația de mișcare cât și din teorema de variației a energiei cinetice.

**Rezolvare**

Se alege sistemul de axe natural cu originea în punctul curent A, ca în fig. 9.3.b. Ecuația vectorială de mișcare a punctului material pe suprafața cilindrică interioară se scrie:

$$m\ddot{\vec{r}} = m\vec{g} + \vec{N} \tag{a}$$

care proiectată pe axele sistemului natural conduce la :

$$\begin{cases} m\dot{v} = -mg \sin \theta, \\ m \frac{v^2}{\rho} = -mg \cos \theta + N \end{cases} \tag{b}$$

Înlocuind:  $\dot{v} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} = \frac{v}{R} \frac{dv}{d\theta}$

în prima ecuație din (b) se obține:

$$\frac{v}{R} \frac{dv}{d\theta} = g \sin \theta \quad \text{sau :} \quad vdv = -Rg \sin \theta d\theta$$

Prin integrare se obține :  $\frac{v^2}{2} = Rg \cos \theta + C$  (c)

Introducând condițiile inițiale:  $\theta(0)=0, v(0)=v_0$  , se obține constanta de integrare:  $C = \frac{v_0^2}{2} - Rg$  ,

Prin urmare legea de mișcare a punctului se scrie:

$$v(\theta) = \sqrt{v_0^2 - 2Rg(1 - \cos \theta)} \tag{d}$$

Utilizând și a doua ecuație (b) se obține legea de variație a reacțiunii normale:

$$N(\theta) = mg(3 \cos \theta - 2) + \frac{mv_0^2}{R} \tag{e}$$

Teorema de variație a energiei cinetice se scrie:  $E_A - E_{A_0} = L_{A_0A}$  (f)

unde :  $E_{A_0} = \frac{1}{2}mv_0^2, \quad E_A = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2$  (g)

$$L_{A_0A} = \int_{A_0A} (\vec{G} + \vec{N}) \cdot d\vec{r} = \int_{A_0A} F^r \cdot ds = \int_0^\theta (-G \sin \varphi) R d\varphi = mgR \cos \varphi \Big|_0^\theta = -mgR(1 - \cos \theta)$$

sau:  $L_{A_0A} = L_{A_0B} + L_{B-A} = L_{A_0B} + 0 = mg(A_0O - BO) = mgR(1 - \cos \theta)$  (h)

Aceasta semnifică faptul că lucrul mecanic nu depinde de drumul parcurs de punctul material, forța de greutate fiind o forță conservativă.

Înlocuind (g) și (h) în (f) se obține:

$$\frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = -mgR(1 - \cos \theta)$$
 (i)

obținându-se aceeași expresie a legii de mișcare (d) :

$$v(\theta) = \sqrt{v_0^2 - 2gR(1 - \cos \theta)}$$
 (j)

**Observații:**

- Din expresia vitezei rezultă că pentru  $v_0 \leq \sqrt{2Rg}$  punctul material parcurge un arc de cerc având unghiul  $\theta \leq 90^\circ$ , după care se întoarce pe același drum (pe suprafața cilindrică) ;
- Pentru valori ale lui  $v_0$  cuprinse între:  $\sqrt{2Rg} < v_0 < \sqrt{5Rg}$ , reacțiunea N se anulează pentru valori ale unghiului:  $90^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ , adică punctul material se desprinde de pe suprafața cilindrică și cade în aer;
- Pentru  $v_0 \geq \sqrt{5Rg}$  rezultă atât  $v > 0$  cât și  $N > 0$ , deci punctul material nu se desprinde de pe suprafața cilindrică și își continuă mișcarea tot timpul pe suprafața cilindrică.

**9.5. Se consideră un punct material de masă  $m$  care se deplasează pe o suprafață cilindrică interioară de rază  $R$ , și unghi  $\alpha$  fără frecare ( $\mu = 0$ ), pornind din  $A_0$  cu viteza inițială  $v_0$  (fig. 9.5.)**

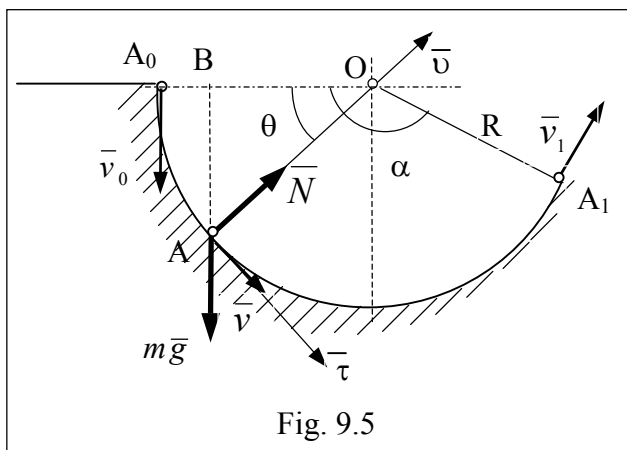


Fig. 9.5

**Se cere să se studieze mișcarea determinând viteza în  $A_1$  ( $v_1$ ) atât din ecuația de mișcare cât și din teorema de variației a energiei cinetice.**

**Rezolvare**

Se alege sistemul de axe natural cu originea în A, ca în fig. 9.5.b. Ecuația vectorială de mișcare a



punctului material pe suprafața cilindrică interioară se scrie:

$$m\ddot{\vec{r}} = m\vec{g} + \vec{N} \quad (\text{a})$$

care proiectată pe axele sistemului natural conduce la :

$$\begin{cases} m\dot{v} = mg \cos \theta, \\ m \frac{v^2}{\rho} = -mg \sin \theta + N \end{cases} \quad (\text{b})$$

Înlocuind:  $\dot{v} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} = \frac{v}{R} \frac{dv}{d\theta}$  și  $\rho=R$  (condiția geometrică) în prima ecuație din (b) se obține:

$$\frac{v}{R} \frac{dv}{d\theta} = g \cos \theta \quad \text{sau :} \quad v dv = Rg \cos \theta d\theta$$

Prin integrare se obține :  $\frac{v^2}{2} = Rg \sin \theta + C$  (c)

Introducând condițiile inițiale:  $\theta(0)=0, v(0)=v_0$  se obține constanta de integrare:  $C = \frac{v_0^2}{2}$ , prin urmare legea de mișcare a punctului se scrie:

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2Rg \sin \theta} \quad (\text{d})$$

Utilizând și a doua ecuație (b) se obține legea de variație a reacțiunii :

$$N = 3mg \sin \theta + \frac{mv_0^2}{R} \quad (\text{e})$$

În punctul  $A_1$  viteza punctului și reacțiunea normală sunt:

$$v_1 = \sqrt{v_0^2 + 2Rg \sin \alpha}, \quad N_1 = 3mg \sin \alpha + \frac{mv_0^2}{R} \quad (\text{f})$$

Teorema de variație a energiei cinetice între pozițiile  $A_0$  și  $A$  se scrie:

$$E_A - E_{A_0} = L_{A_0A}$$

unde energia cinetică pentru cele două poziții se scrie:

$$E_{A_0} = \frac{1}{2}mv_0^2, \quad E_A = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv^2 \quad (\text{g})$$

și lucrul mecanic efectuat asupra punctului între  $A_0$  și  $A$ :

$$L_{A_0A} = \int_{A_0A} (\vec{G} + \vec{N}) \cdot d\vec{r} = \int_{A_0A} F^r \cdot ds = \int_0^\theta (G \cos \varphi) R d\varphi = mgR \sin \varphi \Big|_0^\theta = mgR \sin \theta$$

sau  $L_{A_0A} = L_{A_0B} + L_{BA} = 0 + mg \cdot AB = mgR \sin \theta$  (h)

Înlocuind în (f) se obține:  $\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = mgR \sin \theta$ , rezultând aceeași expresia (d) a legii de mișcare:  $v = \sqrt{v_0^2 + 2Rg \sin \theta}$  (i)

**9.6. Se consideră un punct material de masă  $m$ , care este lansat în sus pe direcție verticală cu viteza inițială  $v_{A_0} = v_0$ . Se cere legea de mișcare și determinarea înălțimii maxime la care ajunge în următoarele trei cazuri:**

- 1) când asupra punctului acționează numai forța de greutate  $\vec{G} = m\vec{g}$
- 2) când asupra punctului acționează atât forța de greutate  $\vec{G} = m\vec{g}$  cât și forța de rezistență a aerului de forma  $\vec{R} = -km\vec{v}$ .
- 3) când asupra punctului acționează atât forța de greutate  $\vec{G} = m\vec{g}$  cât și forța de rezistență a aerului  $\vec{R} = -kmv^2 \frac{\vec{v}}{v}$ .

**Rezolvare:**

1) Într-o poziție intermediară pe  $A_0A_1$ , ecuația vectorială a mișcării se scrie:

$$m\ddot{\vec{r}} = m\vec{g} \tag{a}$$

care proiectată pe axa verticală  $A_0x$  se scrie:  $\ddot{x} = -g$ .

Integrând succesiv de două ori avem;

$$\dot{x} = -gt + C_1, \quad x = -g \frac{t^2}{2} + C_1t + C_2 \tag{b}$$

Punând condițiile la momentul inițial ( $t = 0$ ):  $x(0) = 0$ ,  $\dot{x}(0) = v_0$  se obține:

$C_1 = v_0$ ,  $C_2 = 0$ , iar legile de mișcare pentru viteza și deplasare sunt:

$$x = -\frac{gt^2}{2} + v_0t, \tag{c}$$

$$v = -gt + v_0$$

Eliminând timpul  $t$  se obține viteza  $v$  în funcție de deplasarea  $x$ :

$$v = \sqrt{v_0^2 - 2gx} \tag{d}$$

În punctul de înălțime maximă  $A_1$  avem:

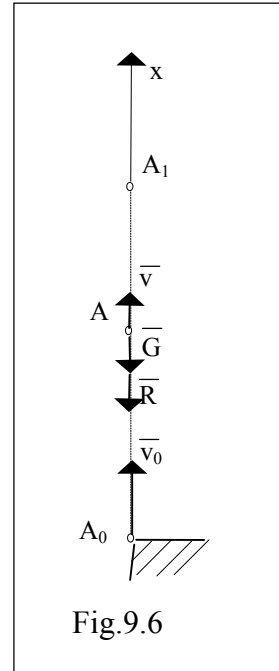
$$v_{A_1} = v_1 = 0, \quad x_{A_1} = h, \text{ iar din (d) rezultă:}$$

$$h = \frac{v_1^2}{2g} = \frac{v_0^2}{2g} - R \tag{e}$$

2). Într-o poziție intermediară pe  $A_0A_1$  ecuația vectorială se scrie:  $m\ddot{\vec{r}} = m\vec{g} - km\vec{v}$ , care proiectată pe axa  $A_0x$  conduce la ecuația diferențială neomogenă:  $\ddot{x} + k\dot{x} = -g$  a cărei soluție generală are forma:

$$x = C_1 + C_2e^{-kt} - \frac{g}{k}t \tag{f}$$

și derivata  $\dot{x} = v = -kC_2e^{-kt} - \frac{g}{k} \tag{g}$



Punând condițiile inițiale:  $x(0) = 0$ ,  $\dot{x}(0) = v_0$  se obțin constantele de integrare:  $C_1 = -C_2 = \frac{kv_0 + g}{k^2}$ , care introduse în relațiile (f) și (g) conduc la:

$$\begin{cases} x = \frac{kv_0 + g}{k^2} (1 - e^{-kt}) - \frac{g}{k} t \\ v = \dot{x} = \frac{kv_0 + g}{k} e^{-kt} - \frac{g}{k} \end{cases} \quad (h)$$

Înălțimea maximă  $x_{A_1} = h$  se obține pentru  $v = 0 \Rightarrow t_{A_1} = t^*$ :

$$t^* = \frac{1}{k} \ln \left( 1 + \frac{kv_0}{g} \right) \quad \text{și} \quad h = \frac{v_0}{k} \left[ 1 - \frac{g}{kv_1} \ln \left( 1 + \frac{kv_1}{g} \right) \right] \quad (i)$$

3) Într-o poziție intermediară pe  $A_0A_1$ , ecuația de mișcare vectorială se scrie:

$$m\ddot{\vec{r}} = m\vec{g} - kmv^2 \frac{\vec{v}}{v} \quad (j)$$

care proiectată pe  $A_0x$  ne conduce la ecuația diferențială:

$$\ddot{x} = -g - k\dot{x}^2 \quad (k)$$

unde înlocuind:  $\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt}$ ,  $\dot{x} = v$ , avem:

$$\frac{dv}{dt} = -(g + kv^2) \Rightarrow \frac{dv}{g/k + v^2} = -kdt \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{g/k}} \operatorname{arctg} \frac{v}{\sqrt{g/k}} = -kt + C \quad (l)$$

Punând condițiile inițiale la  $t=0$ :  $v(0) = v_0$  se obține:

$$C = \frac{1}{\sqrt{g/k}} \operatorname{arctg} \frac{v_0}{\sqrt{g/k}}$$

care înlocuită în (l) se obține timpul  $t$  în funcție de viteză:

$$t = \frac{\operatorname{arctg}(v_0 \sqrt{g/k}) - \operatorname{arctg}(v \sqrt{g/k})}{\sqrt{kg}} \quad (m)$$

Dacă în ecuația (k) se fac substituțiile:

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = v(x(t)), \quad \ddot{x} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = v \frac{dv}{dx}$$

se obține:

$$v \frac{dv}{dx} = -(g + kv^2), \quad \frac{v dv}{g + kv^2} = -dx \Rightarrow \frac{1}{2k} \ln(g + kv^2) = -x + C \quad (n)$$

Din condițiile inițiale la  $t=0$ :  $x(0) = 0$ ,  $v(0) = v_0$  se obține:

$$C = \frac{1}{2k} \ln(g + kv_0^2) \text{ de unde rezultă: } x = \frac{1}{2k} \ln \frac{g + kv_0^2}{g + kv^2} \quad (o)$$

În  $A_1$  avem:  $v = v_{A_1} = 0$ ,  $x_{A_1} = h$

$$\text{și rezultă: } h = \frac{1}{2k} \ln \left( 1 + \frac{kv_0^2}{g} \right) \quad (p)$$

**9.7. Se consideră un punct material de masă  $m$ , care este lansat în câmp gravitațional cu viteza inițială  $\bar{v}_0$  a cărei direcție face cu planul orizontal unghiul  $\alpha$ . Se cere legea de mișcare și determinarea înălțimii maxime la care ajunge în următoarele două cazuri:**

a) când se neglijează rezistența aerului - asupra punctului acționează numai forța de greutate  $\bar{G} = m\bar{g}$

b) când nu se neglijează rezistența aerului - asupra punctului acționează atât forța de greutate  $\bar{G} = m\bar{g}$  cât și o forță de rezistență de forma  $\bar{R} = -km\bar{v}$ .

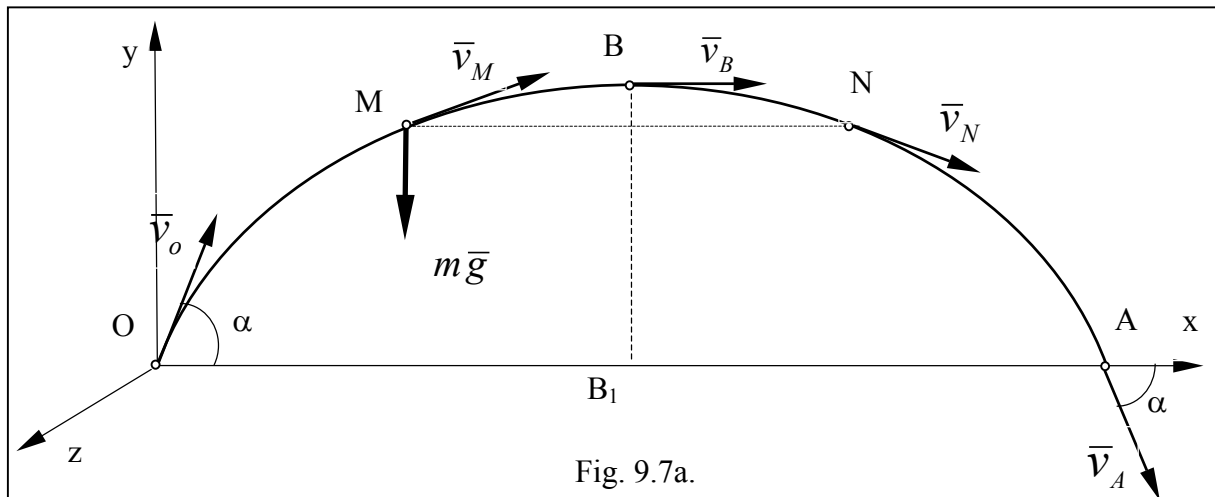


Fig. 9.7a.

### Rezolvare

#### a. Mișcarea în aer când se neglijează rezistența aerului

$$\text{Ecuția fundamentală a dinamicii se scrie: } \bar{F} = \bar{G} = m\bar{g} \tag{a}$$

$$\text{sau } m\ddot{\bar{r}} = m\bar{g} \quad \text{sau} \quad \ddot{\bar{r}} = \bar{g}. \tag{b}$$

scrisă sub forma proiecțiilor pe cele trei axe conduce la :

$$\ddot{x} = 0, \quad \ddot{y} = -g, \quad \ddot{z} = 0 \tag{c}$$

Dacă se integrează succesiv în raport cu timpul, ecuațiile diferențiale (c) se obține soluția generală:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= C_1, & \dot{y} &= -gt + C_2, & \dot{z} &= C_3 \\ x &= C_1t + C_4, & y &= -g\frac{t^2}{2} + C_2t + C_5, & z &= C_3t + C_6 \end{aligned} \tag{d}$$

Condițiile inițiale privind poziția și viteza la momentul  $t = 0$  sunt:

$$\begin{aligned} x(0) &= x_0 = 0, & y(0) &= y_0 = 0, & z(0) &= z_0 = 0 \\ v_{0x} &= \dot{x}(0) = v_0 \cos \alpha, & v_{0y} &= \dot{y}(0) = v_0 \sin \alpha, & v_{0z} &= \dot{z}(0) = 0 \end{aligned} \tag{e}$$

Introducând condițiile (e) în soluțiile generale (d) se obține:

$$\begin{aligned} 0 &= 0 + C_1, & 0 &= 0 + 0 + C_5, & 0 &= 0 + C_6 \\ v_0 \cos \alpha &= C_1, & v_0 \sin \alpha &= 0 + C_2, & 0 &= C_3 \end{aligned} \tag{f}$$

care conduc la:

$$C_1 = v_0 \cos \alpha, \quad C_2 = v_0 \sin \alpha, \quad C_3 = C_4 = C_5 = C_6 = 0 \quad (g)$$

Introducând valorile (g) în (d) se obține soluția particulară căutată:

$$x = (v_0 \cos \alpha)t, \quad y = -\frac{gt^2}{2} + (v_0 \sin \alpha)t, \quad z = 0 \quad (h)$$

Ecuția  $z = 0$  arată că traiectoria descrisă de punctul material este situată în planul vertical (Oxy) care conține vectorul  $\bar{v}_0$ .

Eliminând timpul din ecuațiile (h) se găsește ecuația traiectoriei sub formă explicită ce reprezintă o parabolă cu axa de simetrie verticală:

$$y = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 + x \cdot \operatorname{tg} \alpha. \quad (i)$$

Din relația (h) se deduc, prin derivare, relațiile:

$$\dot{x} = v_0 \cos \alpha; \quad \dot{y} = -gt + v_0 \sin \alpha, \quad \dot{z} = 0. \quad (j)$$

deci:

$$|\bar{v}| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} = \sqrt{v_0^2 - 2gy} \quad (k)$$

Elementele caracteristice ale mișcării sunt:

- distanța  $x_A = OA$  dintre punctul de lansare O și punctul A unde traiectoria întâlnește din nou axa Ox, numită *bătăie*, se obține din ecuația (i) pentru :

$$y_A = 0, \text{ rezultă: } OA = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}. \quad (j)$$

OA devine maximă pentru  $\sin 2\alpha = 1$ , adică  $\alpha = 45^\circ$   $(OA)_{\max} = v_0^2 / g$

- *înălțimea maximă* atinsă de punctul material se obține din condiția:

$$\frac{dy}{dx} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} 2x + \operatorname{tg} \alpha = 0 \quad (k)$$

$$\text{de unde se deduce: } x_B = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{2g}. \quad (l)$$

Se observă că  $x_{B_1} = OB_1 = \frac{OA}{2}$ , datorită proprietăților de simetrie ale parabolei. Ordonata punctului B (sau înălțimea maximă) se obține înlocuind (k) în (i):

$$y_{\max} = B_1 B = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}. \quad (m)$$

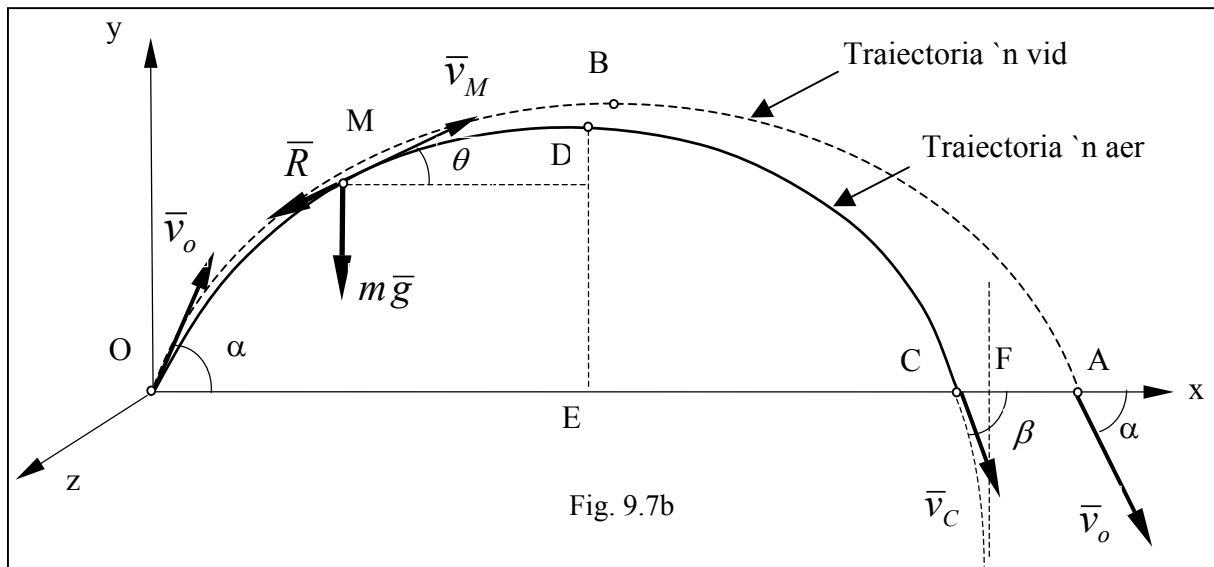
$$(B_1 B)_{\max} = \frac{v_0^2}{2g}.$$

Înălțimea maximă depinde de viteza  $v_0$  și de unghiul  $\alpha$ , ca și bătaia, atingând valoarea maximă pentru  $\sin^2 \alpha = 1$ , adică  $\alpha = 90^\circ$ :

**b. Mișcarea în aer când nu se neglijează rezistența aerului**

Ecuția fundamentală a dinamicii se scrie:

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} + \vec{R} \tag{n}$$



Întrucât forța de rezistență a aerului este de forma:  $\vec{R} = -km\vec{v}$ ,  
descompunând  $\vec{R}$  în componentele sale după axele de coordonate:

$$R_x = -km \dot{x}; \quad R_y = -km \dot{y}; \quad R_z = 0 \tag{o}$$

atunci ecuațiile diferențiale ale mișcării în proiecții pe cele trei axe sunt:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -km\dot{x} & \ddot{x} + k\dot{x} &= 0 \\ m\ddot{y} &= -km\dot{y} - mg & \text{sau} & \quad \ddot{y} + k\dot{y} &= -g \end{aligned} \tag{p}$$

$$m\ddot{z} = 0 \quad \ddot{z} = 0$$

Soluțiile generale ale ecuațiilor (p) sunt:

$$x = C_1 + C_2 e^{-kt}; \quad y = C_3 + C_4 e^{-kt} - \frac{g}{k}t; \quad z = C_5 + C_6 t \tag{q}$$

iar prin derivare rezultă vitezele după cele trei direcții:

$$\dot{x} = -kC_2 e^{-kt}; \quad \dot{y} = -kC_4 e^{-kt} - \frac{g}{k}; \quad \dot{z} = C_6 \tag{r}$$

Condițiile inițiale (poziția și viteza punctului pentru  $t=0$ ) sunt :

$$\begin{aligned} x(0) &= 0 & y(0) &= 0 & z(0) &= 0 \\ \dot{x}(0) &= v_0 \cos \alpha, & \dot{y}(0) &= v_0 \sin \alpha, & \dot{z}(0) &= 0. \end{aligned} \tag{s}$$

care dacă se introduc în ecuațiile (q) și (r) se obțin constantele de integrare:

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{v_0 \cos \alpha}{k}; \quad C_2 = -\frac{v_0 \cos \alpha}{k}; \quad C_3 = \frac{g + kv_0 \sin \alpha}{k^2}; \\ C_4 &= -\frac{g + kv_0 \sin \alpha}{k^2}, \quad C_5 = C_6 = 0 \end{aligned} \tag{t}$$

Ecuțiile (q) devin:

$$\begin{aligned} x &= \frac{v_0 \cos \alpha}{k} (1 - e^{-kt}); \\ y &= \frac{g + kv_0 \sin \alpha}{k^2} (1 - e^{-kt}) - \frac{g}{k} t; \end{aligned} \quad (u)$$

$$z = 0$$

Eliminând timpul din primele două ecuații (u) se obține ecuația traiectoriei sub formă explicită:

$$y = x \cdot \operatorname{tg} \alpha + \frac{gx}{kv_0 \cos \alpha} + \frac{g}{k} \ln \left( 1 - \frac{kx}{v_0 \cos \alpha} \right). \quad (v)$$

Se observă că curba traiectoriei admite o asimptotă verticală a cărei ecuație se deduce când  $t \rightarrow \infty$  în ecuațiile parametrice (t):

$$x = x_F = \frac{v_0 \cos \alpha}{k}. \quad (w)$$

Prin derivarea relațiilor (8.64) se deduc componentele vitezei:

$$\dot{x} = v_0 \cos \alpha e^{-kt}; \quad \dot{y} = \frac{g + kv_0 \sin \alpha}{k} e^{-kt} - \frac{g}{k}; \quad \dot{z} = 0 \quad (x)$$

Punând condiția  $\dot{y} = 0$ , se găsește punctul de înălțime maximă D al traiectoriei. Deci timpul necesar deplasării din O în D este:

$$t_D = \frac{1}{k} \ln \frac{g + kv_0 \sin \alpha}{g}. \quad (y)$$

Înlocuind în expresia (u) se obține înălțimea maximă a traiectoriei și abscisa corespunzătoare acestui punct:

$$\begin{aligned} y_{\max} = y_D &= \frac{v_0 \sin \alpha}{k} - \frac{g}{k^2} \ln \frac{g + kv_0 \sin \alpha}{g} \\ x_D = x_E &= \frac{v_0^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g + kv_0 \sin \alpha} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{2(g + kv_0 \sin \alpha)}. \end{aligned} \quad (z)$$

**9.8. Se consideră un punct material de masă  $m$  care se deplasează fără frecare ( $\mu = 0$ ) pe conturul circular  $A_0A_1$ , de rază  $R = CA_0 = CA_1$  cu viteză inițială  $v_0$  (fig.9.8). După ce parcurge acest drum cu unghiul la centru  $\alpha = \pi/2$ , continuă deplasarea în aer  $A_1A_2$  ( $OA_1 = h$ ). **Se cere:****

- 1) Să se studieze mișcarea pe  $A_0A_1$ , folosind atât ecuația de mișcare cât și teorema de variației a energiei cinetice.
- 2) Să se studieze mișcarea pe porțiunea  $A_1A_2$ , în două variante de acționare a forțelor de rezistență a aerului: a)  $\bar{R} = 0$ ; b)  $\bar{R} = -km\bar{v}$

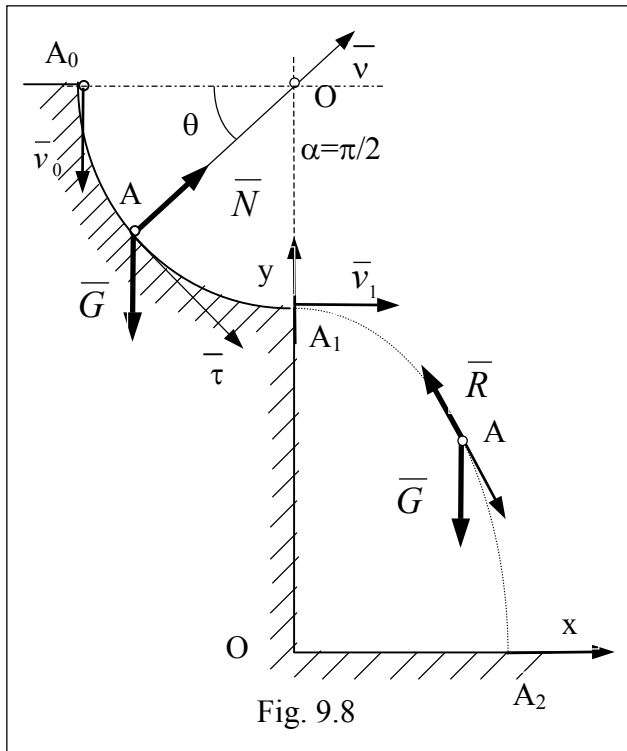


Fig. 9.8

**Rezolvare**

1) Mișcarea pe drumul  $A_1A_2$ :

Se alege sistemul de axe natural cu originea în A, ca în fig. 9.8. Ecuația vectorială de mișcare a punctului material se scrie:

$$m\ddot{\vec{r}} = m\vec{g} + \vec{N} \tag{a}$$

care proiectată pe axele sistemului natural conduce la :

$$\begin{cases} m\dot{v} = mg \cos \theta, \\ m \frac{v^2}{\rho} = -mg \sin \theta + N \end{cases} \tag{b}$$

Întrucât:  $\dot{v} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} = \frac{v}{R} \frac{dv}{d\theta}$

ecuațiile (b) devin: 
$$\begin{cases} vdv = gR \cos \theta d\theta \\ m \frac{v^2}{R} = -mg \sin \theta + N \end{cases} \tag{b'}$$

Prin integrare se obține :  $v = \sqrt{2Rg \sin \theta + v_0^2}$  (c)

Din a doua ecuație (b') se obține legea de variație a reacțiunii normale:

$$N = 3mg \sin \theta + \frac{mv_0^2}{R} \tag{d}$$

În punctul  $A_1$  viteza punctului și reacțiunea normală sunt:

$$v_1 = \sqrt{v_0^2 + 2Rg \sin(\pi/2)} = \sqrt{v_0^2 + 2Rg} \tag{e}$$

$$N_1 = 3mg + \frac{mv_0^2}{R}$$

Teorema de variație a energiei cinetice între pozițiile  $A_0$  și  $A$  se scrie:

$$E_A - E_{A_0} = L_{A_0A} \tag{f}$$

unde :  $E_{A_0} = \frac{1}{2}mv_0^2, \quad E_A = \frac{1}{2}mv^2$

$$L_{A_0A} = \int_{A_0A} (\vec{G} + \vec{N}) \cdot d\vec{r} = \int_{A_0A} F^\tau \cdot ds = \int_0^\theta (G \cos \varphi) R d\varphi = mgR \sin \varphi \Big|_0^\theta = mgR \sin \theta$$

sau (vezi fig.9.8):  $L_{A_0A} = L_{A_0B} + L_{B-A} = 0 + L_{B-A} = mgR \sin \theta$

Înlocuind în (f) se obține legea de mișcare (d) :

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = mgR \sin \theta \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{v_0^2 + 2Rg \sin \theta}$$



2.a. Pentru studiul mișcării pe  $A_1A_2$  în absența rezistenței aerului, se alege sistemul de axe  $Oxy$  ca în fig. 9.8, și se scriu succesiv relațiile:

$$m\ddot{\vec{r}} = m\vec{g} \quad \text{sau} \quad \ddot{\vec{r}} = \vec{g}. \quad (\text{g})$$

care se scriu sub forma ecuațiilor diferențiale, care integrate dau:

$$\begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = -g \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = C_1 \\ \dot{y} = -gt + C_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = C_1t + C_3 \\ y = -g\frac{t^2}{2} + C_2t + C_4 \end{cases} \quad (\text{h})$$

Condițiile inițiale în  $A_1$  privind poziția și viteza la momentul  $t = 0$  sunt:

$$\begin{aligned} x(0) = x_0 = 0, \quad v_{0x} = \dot{x}(0) = v_1, \\ y(0) = h, \quad v_{0y} = \dot{y}(0) = 0, \end{aligned} \quad (\text{i})$$

Se obține sistemul de ecuații și soluțiile :

$$\begin{cases} 0 = 0 + C_3 \\ h = 0 + 0 + C_4 \\ v_1 = C_1 \\ 0 = 0 + C_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = v_1 \\ C_2 = 0 \\ C_3 = 0 \\ C_4 = h \end{cases} \quad (\text{j})$$

Soluțiile ecuațiilor mișcării sunt:

$$\begin{cases} x = v_1t = \left(\sqrt{v_0^2 + 2Rg}\right)t \\ y = -g\frac{t^2}{2} + h \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{x} = v_1 = \sqrt{v_0^2 + 2Rg} \\ \dot{y} = -gt \end{cases} \quad (\text{k})$$

Traectoria mișcării este o parabolă:

$$y = -\frac{g}{2v_1^2}x^2 + h, \quad (\text{l})$$

care are vârful în  $A_1$  și intersectează axa  $Ox$  în punctul  $A_2$  de abscisă:

$$x_{A_2} = \sqrt{\frac{2hv_1^2}{g}} = \sqrt{\frac{2h(v_0^2 + 2Rg)}{g}}$$

la momentul  $t_1$  dat de :  $t_1 = \frac{x_{A_2}}{v_1} = \sqrt{\frac{2h}{g}}$  (m)

Dcei viteza punctului în  $A_2$  este:

$$v_{A_2} = \sqrt{\dot{x}^2(t_1) + \dot{y}^2(t_1)} = \sqrt{v_0^2 + 2g(R + h)} \quad (\text{n})$$

2.b. Pentru studiul mișcării pe  $A_1A_2$ , în ipoteza că rezistența aerului este de forma  $\vec{R} = -km\vec{v}$ , ecuațiile de mișcare conduc la:

$$m\ddot{\vec{r}} = m\vec{g} - km\vec{v} \quad \text{sau} \quad \ddot{\vec{r}} = \vec{g} - k\vec{v} \quad (\text{o})$$

ecuațiile diferențiale ale mișcării în proiecții pe cele două axe sunt:

$$\begin{cases} \ddot{x} + k\dot{x} = 0 \\ \ddot{y} + k\dot{y} = -g \end{cases} \quad (\text{p})$$

Soluțiile generale ale ecuațiilor (p) sunt:

$$\begin{cases} x = C_1 + C_2 e^{-kt}; \\ y = C_3 + C_4 e^{-kt} - \frac{g}{k}t; \end{cases} \quad (\text{q})$$

prin derivare rezultă vitezele

$$\dot{x} = -kC_2 e^{-kt}; \quad \dot{y} = -kC_4 e^{-kt} - \frac{g}{k}; \quad (\text{r})$$

Condițiile inițiale (poziția și viteza punctului în  $A_1$ ) sunt :

$$\begin{aligned} x(0) = 0 & \quad \dot{x}(0) = v_1 \\ y(0) = h & \quad \dot{y}(0) = 0 \end{aligned} \quad (\text{s})$$

care dacă se introduc în ecuațiile (q) și (r) se obțin constantele de integrare:  $C_1 = -C_2 = -\frac{v_1}{k}$ ,  $C_3 = h + \frac{g}{k^2}$ ,  $C_4 = -\frac{g}{k^2}$

Ecuațiile (q) devin:

$$\begin{aligned} x &= \frac{v_1}{k}(1 - e^{-kt}) = \frac{\sqrt{v_0^2 + 2Rg}}{k}(1 - e^{-kt}); \\ y &= \frac{g}{k^2}(1 - e^{-kt}) - \frac{g}{k}t + h; \end{aligned} \quad (\text{t})$$

Eliminând timpul din primele două ecuații (8.64) se obține ecuația traiectoriei sub formă explicită:

$$y = \frac{gx}{kv_1} + \frac{g}{k} \ln\left(1 - \frac{kx}{v_1}\right) + h \quad (\text{u})$$

Se observă că curba traiectoriei admite o asimptotă verticală a cărei ecuație se deduce când  $t \rightarrow \infty$  în ecuațiile parametrice (t):

$$x = x_F = \frac{v_1}{k}. \quad (\text{v})$$

Prin derivarea relațiilor (8.64) se deduc componentele vitezei:

$$\begin{aligned} v_x = \dot{x} &= v_1 e^{-kt}; \\ v_y = \dot{y} &= \frac{g + kv_1}{k} e^{-kt} - \frac{g}{k}; \end{aligned} \quad (\text{w})$$

**9.9. Se consideră** un punct material de masă  $m$  care se deplasează cu frecare ( $\mu \neq 0$ ) pe drumul  $A_0A_1 = l$ , cu viteză inițială  $v_0$ . După ce parcurge fără frecare, drumul pe arcul de cerc  $A_1A_2$  (de rază  $R$ ), părăsește cercul și continuă deplasarea în aer (fig. 9.9). **Se cere:**

- 1) Să se studieze mișcarea pe  $A_0A_1$ , determinându-se viteza în  $A_1$  ( $V_1$ ), folosind atât ecuația de mișcare cât și teorema de variației a energiei cinetice.
- 2) Să se studieze mișcarea pe porțiunea  $A_1A_2$ , determinându-se unghiul la centru  $\alpha$  și viteza în punctul  $A_2$  unde punctul se desprinde de cerc.

**Rezolvare:**

1) Ecuația vectorială de mișcare pe  $A_0A_1$  se scrie:

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{G} + \vec{N} + \vec{T} \quad (a)$$

care proiectată pe axele  $x$  și  $y$ :

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -T \\ m\ddot{y} = -mg + N \end{cases} \quad (b)$$

la care se asociază:

$y = 0 (\Rightarrow \ddot{y} = 0)$ , condiția geometrică și

$T = \mu N$ , condiția fizică ( de frecare).

Prin urmare, din a doua ecuație (b)

avem:  $N = mg \Rightarrow T = \mu mg$

Înlocuind pe  $T$  în ecuația primă din (b)

aceasta devine:

$$\ddot{x} = -\mu g \Rightarrow \dot{x} = -\mu g t + C_1 \Rightarrow x = -\mu g \frac{t^2}{2} + C_1 t + C_2$$

Introducând condițiile inițiale ( $t = 0 \Rightarrow x(0) = 0, \dot{x}(0) = v_0$ ) se obține:

$$C_1 = v_0, C_2 = 0$$

și legile de mișcare ale spațiului și vitezei:

$$x = -\mu g \frac{t^2}{2} + v_0 t, \quad v = -\mu g t + v_0 \quad (c)$$

sau eliminând timpul legea viteză-spațiu:

$$v = \sqrt{v_0^2 - 2\mu g x} \quad (d)$$

Pentru  $x = x_{A_1} = L$  se obține viteza în  $A_1$ :  $v_1 = \sqrt{v_0^2 - 2\mu g L}$

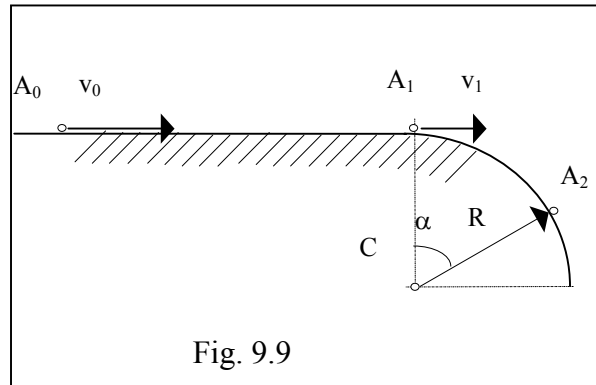


Fig. 9.9

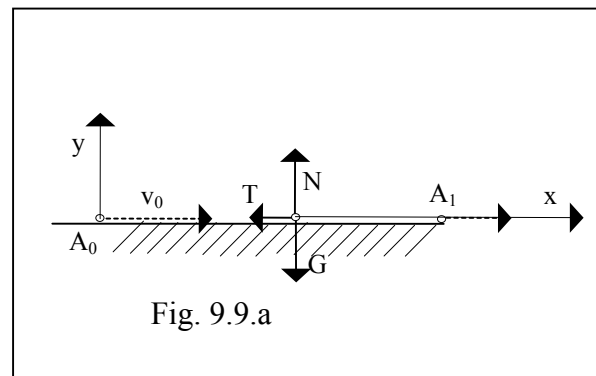


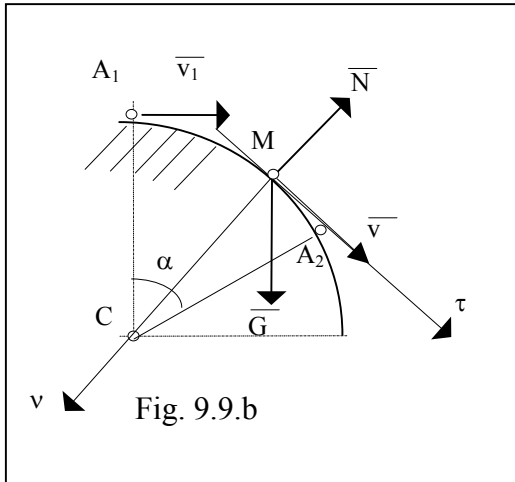
Fig. 9.9.a

Iar din teorema energiei (și condiția  $v_0 > \sqrt{2\mu gL}$ ):  $E_{A_1} - E_{A_0} = L_{A_0 A_1}$

adică:  $\frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = -T \cdot L = -\mu mgL$  și se obține aceeași expresie pentru  $v_1$ :

$$v_1 = \sqrt{v_0^2 - 2\mu gL}$$

2) Ecuația vectorială privind mișcarea pe arcul de cerc  $A_1A_2$  (Fig. 9.9.a) este:



$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{G} + \vec{N} \quad (e)$$

care proiectată pe axele naturale se scriu:

$$\begin{cases} m\dot{v} = mg \sin \theta \\ m \frac{v^2}{\rho} = mg \cos \theta - N \end{cases} \quad (f)$$

Prima ecuație din (f)  $\dot{v} = g \sin \theta$ ,

unde  $\dot{v} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} = \frac{v}{R} \frac{dv}{d\theta}$ , devine:

$$v dv = Rg \sin \theta d\theta \quad \text{care integrată} \Rightarrow \frac{v^2}{2} = -Rg \cos \theta + C_1 \text{ iar din condițiile}$$

inițiale ( $t = 0, \theta(0) = 0, v(0) = v_1$ ) se obține  $C = \frac{v_1^2}{2} + Rg$  și prin urmare legea

$$\text{viteză-spațiu se scrie: } v = \sqrt{2Rg(1 - \cos \theta) + v_1^2} \quad (g)$$

Înlocuind (g) și  $\rho = R$  în ecuația a doua din (f) se obține:

$$N = mg(3 \cos \theta - 2) - \frac{mv_1^2}{R} \quad (h)$$

Formulele (g) și (h) reprezintă viteza și reacțiunea nominală într-un punctoarecare de pe arcul  $A_1A_2$ . Presupunând că în  $A_2$  mobilul părăsește cercul, se impun condițiile:  $\theta = \alpha \Rightarrow N = 0$  și  $v = v_{A_2} = v_2$ , iar (g) și (h) se scriu:

$$\begin{cases} v_2 = \sqrt{2Rg(1 - \cos \alpha) + v_1^2} \\ 0 = mg(3 \cos \alpha - 2) - \frac{mv_1^2}{R} \end{cases} \quad (i)$$

obținându-se:

$$\cos \alpha = \frac{v_1^2 + 2Rg}{3Rg} \Rightarrow v_2 = \sqrt{\frac{2Rg + v_1^2}{3}} \Rightarrow v_2 = \sqrt{\frac{2Rg + v_0^2 - 2\mu gL}{3}} \quad (j)$$

**Observație:** Dacă se impune condiția:  $0 < \cos \alpha \leq 1$

$$\text{Rezultă limitele vitezei } v_0 : \sqrt{2\mu gl} < v_0 < \sqrt{Rg + 2\mu gl} \quad (k)$$

**9.10** *Se consideră un punct material de masă  $m$ , care se deplasează pe interiorul sfertului de cerc  $A_0A_1$ , de rază  $R$ , fără frecare ( $\mu = 0$ ), cu viteza inițială  $v_{A_0} = v_0$ , după care continuă mișcarea pe verticală în aer. **Se cer:***

- 1) *Mișcarea pe  $A_0A_1$  folosind atât ecuația de mișcare cât și teorema de variației a energiei cinetice.*
- 2) *Mișcarea pe verticală  $A_1A_2$ , determinând înălțimea maximă la care ajunge mobilul de masă  $m$ , în cazurile:*
  - a) *asupra punctului acționează numai forța de greutate  $\vec{G} = m\vec{g}$*
  - b) *asupra punctului acționează atât forța de greutate  $\vec{G} = m\vec{g}$  cât și forța de rezistență a aerului având forma  $\vec{R} = -km\vec{v}$ .*
  - c) *asupra punctului acționează atât forța de greutate  $\vec{G} = m\vec{g}$  cât și forța de rezistență a aerului având forma  $\vec{R} = -kmv^2 \frac{\vec{v}}{v}$ .*

**Rezolvare:**

1) Ecuația vectorială de mișcare pe  $\overline{A_0A_1}$  este:

$$m\ddot{\vec{r}} = m\vec{g} + \vec{N}$$

care proiectată pe axele naturale conduce la :

$$\begin{cases} m\dot{v} = -mg \sin \theta, \\ m \frac{v^2}{\rho} = -mg \cos \theta + N \end{cases}$$

Ținând seama de condiția geometrică  $\rho = R$

și de faptul că:

$$\dot{v} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} = \omega \frac{dv}{d\theta} = \frac{v}{R} \frac{dv}{d\theta}$$

Sistemul (2) devine

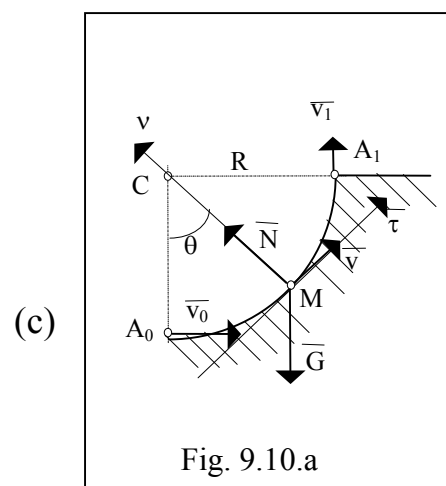
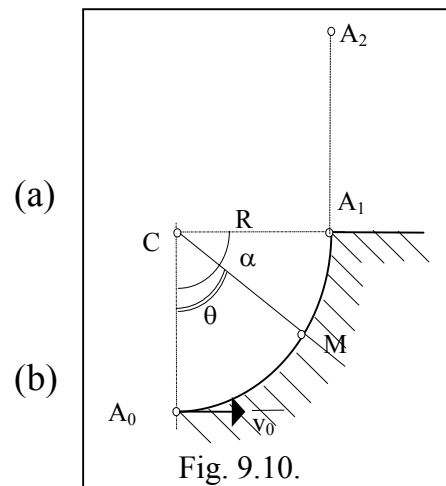
$$\begin{cases} \frac{v}{R} \frac{dv}{d\theta} = -g \sin \theta \\ m \frac{v^2}{R} = -mg \cos \theta + N \end{cases}$$

Prima ecuație se scrie:

$$v dv = -Rg \sin \theta d\theta \quad \Rightarrow \quad \frac{v^2}{2} = Rg \cos \theta + C$$

unde constanta de integrare  $C$  se determină din ecuațiile inițiale:

$$t = 0, v(0) = v_0, \theta(0) = 0: \quad C = \frac{v_0^2}{2} - Rg$$



$$\text{prin urmare: } v = \sqrt{v_0^2 + 2Rg(\cos \theta - 1)} \quad (d)$$

Utilizând și a doua ecuație a sistemului se obține reacțiunea normală:

$$N = mg(3 \cos \theta - 2) + \frac{mv_0^2}{R} \quad (e)$$

Atât  $v$  cât și  $N$  au fost obținute pentru o poziție oarecare a mobilului, având unghiul  $\theta = \theta(t)$ .

Pentru a găsi viteza în  $A_1$  se înlocuiește în (d)  $\theta = \frac{\pi}{2}$  și se obține:

$$v_{A_1} = v_1 = \sqrt{v_0^2 - 2Rg} \quad (f)$$

Această viteză se poate obține și utilizând teorema de variație a energiei cinetice:

$$E_{A_1} - E_{A_0} = L_{A_0 A_1} \Rightarrow \frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = -mgR$$

de unde se obține pentru  $v_1$  aceeași expresie (f) pentru  $v_1$ :  $v_{A_1} = v_1 = \sqrt{v_0^2 - 2Rg}$

2) a. Studiul mișcării pe verticală în aer fără rezistența aerului

Într-o poziție intermediară pe  $A_1 A_2$ , ecuația vectorială de mișcare este:

$$m\ddot{\vec{r}} = m\vec{g}, \quad \ddot{\vec{r}} = \vec{g}$$

care proiectată pe axa verticală  $A_1 x$  se scrie:  $\ddot{x} = -g$ .

Integrând succesiv de două ori avem;

$$\dot{x} = -gt + C_1, \quad x = -g \frac{t^2}{2} + C_1 t + C_2$$

Punând condițiile inițiale  $t = 0, x(0) = 0, \dot{x}(0) = v_1$

se obține:  $C_1 = v_1, C_2 = 0,$

iar legile de mișcare pentru viteza și deplasare sunt:

$$x = -\frac{gt^2}{2} + v_1 t, \quad v = -gt + v_1 \quad (g)$$

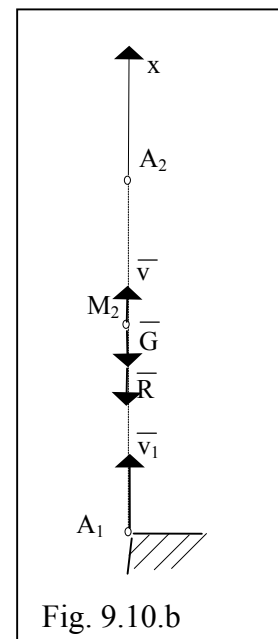
Eliminând timpul  $t$  din cele două ecuații (g) se obține:  $v = \sqrt{v_1^2 - 2gx}$

Expresia lui  $v_1$  este dată de (f). În punctul de înălțime maximă  $A_2$  avem:

$$v_{A_2} = v_2 = 0, \quad x_{A_2} = x_{max} = h,$$

iar din (6) rezultă:

$$h = \frac{v_1^2}{2g} = \frac{v_0^2}{2g} - R \quad (h)$$



2) b. Studiul mișcării pe verticală în aer cu rezistența aerului  $\bar{R} = -km\bar{v}$

Într-o poziție intermediară pe  $A_1A_2$  ecuația vectorială se scrie:  $m\ddot{\bar{r}} = m\bar{g} + km\bar{v}$ , care proiectată pe axa  $A_1x$  conduce la ecuația diferențială neomogenă:

$$\ddot{x} + k\dot{x} = -g \quad (i)$$

a cărei soluție generală are forma:

$$\left. \begin{aligned} x &= C_1 + C_2 e^{-kt} - \frac{g}{k}t \\ \dot{x} = v &= -C_2 k - \frac{g}{k} \end{aligned} \right\} \quad (j)$$

Punând condițiile inițiale:  $x(0) = 0$ ,  $\dot{x}(0) = v_1$  se obțin constantele de integrare:  $C_1 = -C_2 = \frac{kv_1 + g}{k^2}$

care introduse în (9) se obține :

$$\left\{ \begin{aligned} x &= \left( \frac{v_1}{k} + \frac{g}{k^2} \right) (1 - e^{-kt}) - \frac{g}{k}t \\ v = \dot{x} &= \left( v_1 + \frac{g}{k} \right) e^{-kt} - \frac{g}{k} \end{aligned} \right. \quad (k)$$

Înălțimea maximă  $x_{A_2} = h_{max}$  se obține pentru  $v_{A_2} = 0$ , pentru  $t_{A_2} = t^*$ :

$$t^* = \frac{1}{k} \ln \left( 1 + \frac{kv_1}{g} \right) \quad \text{deci} \quad h = \frac{v_0}{k} \left[ 1 - \frac{g}{kv_1} \ln \left( 1 + \frac{kv_1}{g} \right) \right] \quad (l)$$

2) c. Studiul mișcării pe verticală în aer cu rezistența aerului  $\bar{R} = -km\bar{v}^2$

Într-o poziție intermediară pe  $A_1A_2$ , ecuația de mișcare vectorială se scrie:

$$m\ddot{\bar{r}} = m\bar{g} + km\bar{v}^2 \quad (m)$$

care proiectată pe axa  $A_1x$  ne conduce la ecuația diferențială:  $\ddot{x} = -g - k\dot{x}^2$

unde înlocuind  $\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt}$  și  $\dot{x} = v$ , avem:

$$\frac{dv}{dt} = -(g + kv^2) \Rightarrow \frac{dv}{\frac{g}{k} + v^2} = -dt \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{\frac{g}{k}}} \operatorname{arctg} \frac{v}{\sqrt{\frac{g}{k}}} = -kt + C \quad (n)$$

Punând condițiile inițiale la  $t=0$ :  $v(0) = v_1$  se obține :

$$C = \frac{1}{\sqrt{g/k}} \operatorname{arctg} \frac{v_1}{\sqrt{g/k}} \quad (o)$$

Înlocuind (o) în (n) se obține legea de mișcare sub forma unei funcții a timpului  $t$  depinzând de viteza  $v$ :

$$t = \frac{\arctg(v_1 \sqrt{g/k}) - \arctg(v \sqrt{g/k})}{\sqrt{kg}} \quad (p)$$

Dacă în ecuația (n) se fac substituțiile:

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = v(x(t)), \quad \ddot{x} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = v \frac{dv}{dx}$$

se obține ecuația diferențială:

$$v \frac{dv}{dx} = -(g + kv^2), \quad \frac{v dv}{g + kv^2} = -dx \quad (q)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2k} \ln(g + kv^2) = -x + C$$

Din condițiile inițiale la  $t = 0$ :  $x(0) = 0$ ,  $v(0) = v_1$  se obține:  $C = \frac{1}{2k} \ln(g + kv_1^2)$

Deci legea de mișcare sub forma unei funcții a deplasării  $x$  de viteza  $v$  se scrie:

$$x = \frac{1}{2k} \ln \frac{g + kv_1^2}{g + kv^2} \quad (r)$$

În  $A_2$  avem:  $v = v_{A_2} = 0$ ,  $x_{A_2} = h$  și rezultă înălțimea maximă:

$$h = \frac{1}{2k} \ln \left( 1 + \frac{kv_1^2}{g} \right) \quad (p)$$

**9.11. Se consideră un punct material de masă  $m$  care se deplasează pe un plan înclinat cu unghiul  $\alpha$ , cu frecare ( $\mu \neq 0$ ), pornind din  $A_0$  cu viteza inițială  $v_0$ . După ce ajunge în  $A_1$  își continuă drumul în aer. (fig. 9.11.a). Se cere:**

- 1) Să se determine legea de mișcare pe  $A_0A_1$ , folosind atât ecuația de mișcare cât și teorema de variației a energiei cinetice.
- 2) Să se determine legea de mișcare în aer pe  $A_1A_2$ , în cele două cazuri:
  - a) când se neglijează rezistența aerului ;
  - b) când rezistența aerului are forma  $\bar{R} = -km\bar{v}$ .

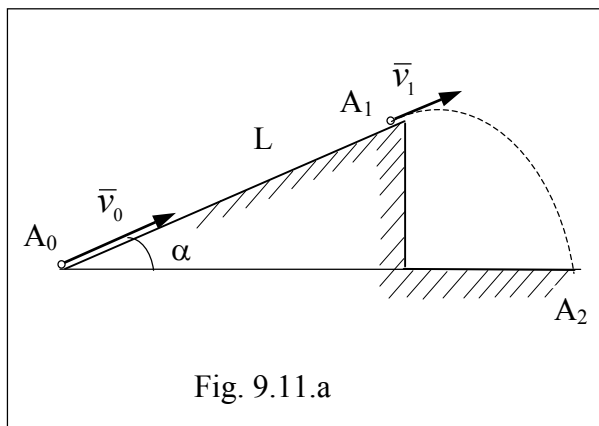


Fig. 9.11.a

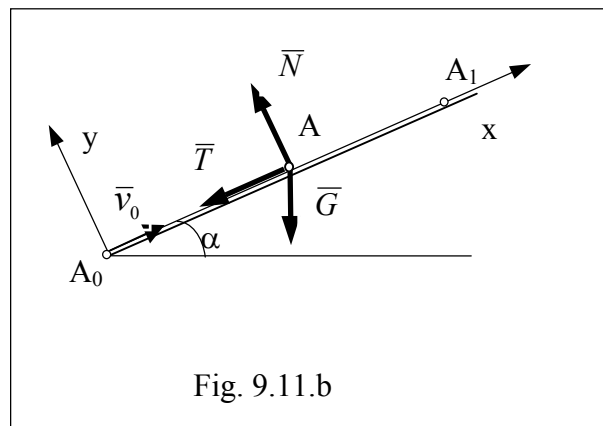


Fig. 9.11.b



**Rezolvare:**

1. În cazul urcării pe planul înclinat, se alege sistemul de axe  $Oxy$  cu originea în  $A_0$  și axa  $Ox$  pe direcția planului în sensul mișcării, ca în *fig. 9.2.b* și se eliberează punctul de legături introducându-se forțele de legătură  $\bar{N}$  și  $\bar{T}$  ( $T = \mu N$ ) (conform axiomei legăturilor).

Ecuția diferențială a mișcării pe  $A_0A_1$ , în proiecții pe axe se scrie:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -mg\sin\alpha - T; \\ m\ddot{y} &= -mg\cos\alpha + N, \end{aligned} \tag{a}$$

Ecuția traiectoriei (condiția geometrică) este:  $y = 0$  ( $\dot{y} = 0$ ;  $\ddot{y} = 0$ )

Condiția fizică a frecării este:  $T = \mu N$ , care introduse în (a) conduc la:

$$\begin{aligned} N &= mg\cos\alpha \\ \ddot{x} &= -g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha) \end{aligned} \tag{b}$$

Integrând succesiv de două ori ultima ecuație (b), se obține:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)t + C_1, \\ x &= -\frac{1}{2}(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)gt^2 + C_1t + C_2. \end{aligned} \tag{c}$$

Dacă se introduc condițiile la momentul inițial  $t = 0$ :

$x(0) = 0$ ,  $\dot{x}(0) = v_0$ , rezultă constantele de integrare:  $C_1 = v_0$ ,  $C_2 = 0$ .

Legea de mișcare este dată de:

$$\begin{aligned} x(t) &= v_0t - \frac{1}{2}(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)gt^2 \\ v(t) &= \dot{x}(t) = v_0 - (\sin\alpha + \mu\cos\alpha)gt. \end{aligned} \tag{d}$$

Eliminând parametrul  $t$  din ecuațiile (d) se obține:

$$v(x) = \sqrt{v_0^2 - 2xg(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)} \tag{e}$$

În punctul  $A_1$  avem:  $x_{A_1} = L$  și viteza devine:

$$v_1 = \sqrt{v_0^2 - 2Lg(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)} \tag{f}$$

Același rezultat se obține dacă se aplică teorema de variație a energiei cinetice:  $E_1 - E_0 = L_{0-1}$

$$\text{unde: } E_1 = \frac{1}{2}mv_1^2, \quad E_0 = \frac{1}{2}mv_0^2$$

$$L_{0-1} = \int_{0-1} \bar{F} \cdot d\bar{r} = \int_{0-1} [(-G\sin\alpha - T)\bar{i} + (-G\cos\alpha + N)\bar{j}] \cdot (dx\bar{i})$$

$$L_{0-1} = (-G\sin\alpha - T)L = -mgL(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)$$

Înlocuind, obținem aceeași relație (f) pentru  $v_1$ .

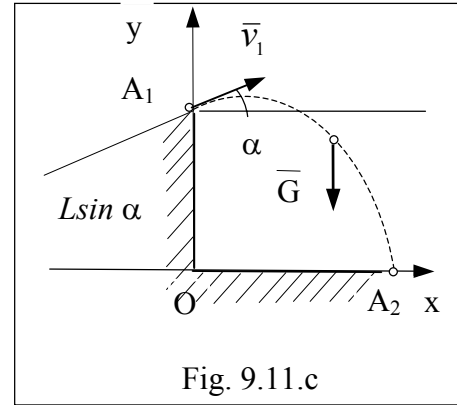
2) a. Pentru studiul mișcării pe  $A_1A_2$  în absența rezistenței aerului, se alege sistemul de axe  $Oxy$  ca în fig. 9.8, și se scriu succesiv relațiile:

$$m\ddot{\vec{r}} = m\vec{g} \quad \text{sau} \quad \ddot{\vec{r}} = \vec{g}. \quad (g)$$

care se scriu sub forma ecuațiilor diferențiale, care integrate succesiv conduc la:

$$\begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = -g \\ \dot{x} = C_1 \\ \dot{y} = -gt + C_2 \\ x = C_1t + C_3 \\ y = -g\frac{t^2}{2} + C_2t + C_4 \end{cases}$$

(h)



Condițiile inițiale în  $A_1$  privind poziția și viteza la momentul  $t = 0$  sunt:

$$\begin{aligned} x(0) = x_0 = 0, & \quad v_{0x} = \dot{x}(0) = v_1 \cos \alpha \\ y(0) = L \sin \alpha, & \quad v_{0y} = \dot{y}(0) = 0 \sin \alpha \end{aligned} \quad (i)$$

Se obține sistemul de ecuații și soluțiile corespunzătoare pentru constantele de integrare  $C_1, C_2, C_3, C_4$ :

$$\begin{cases} 0 = 0 + C_3 \\ L \sin \alpha = 0 + 0 + C_4 \\ v_1 \cos \alpha = C_1 \\ v_1 \sin \alpha = 0 + C_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = v_1 \cos \alpha \\ C_2 = v_1 \sin \alpha \\ C_3 = 0 \\ C_4 = L \sin \alpha \end{cases} \quad (j)$$

Soluțiile ecuațiilor mișcării sunt:

$$\begin{cases} x = v_1 \cos \alpha \cdot t \\ y = -\frac{gt^2}{2} + v_1 \sin \alpha \cdot t + L \sin \alpha \end{cases} \quad \begin{cases} v_x = \dot{x} = v_1 \cos \alpha \\ v_y = \dot{y} = -gt + v_1 \sin \alpha \end{cases} \quad (k)$$

Eliminând timpul din primele două ecuații rezultă traiectoria mișcării:

$$y = -\frac{g}{2(v_1 \cos \alpha)^2} x^2 + tg \alpha \cdot x + L \sin \alpha, \quad (l)$$

care este o parabolă (fig. 9.11.c) având vârful în V ( $v_y=0$ ):

$$x_v = \frac{v_1}{g} tg \alpha; \quad y_v = \frac{v_1^2}{2g} \sin^2 \alpha \left( \frac{2}{\cos \alpha} - 1 \right) + L \sin \alpha$$

și care intersectează axa  $Ox$  în punctual  $A_2$  ( $y=0$ ) la momentul  $t_1$  dat de :

$$t_1 = \frac{1}{g} \left[ v_1 \sin \alpha + \sqrt{v_1^2 \sin^2 \alpha + 2Lg \sin \alpha} \right] \quad (m)$$

Deci viteza punctului în  $A_2$  este:  $v_{A_2} = \sqrt{\dot{x}^2(t_1) + \dot{y}^2(t_1)} = \sqrt{v_1^2 + 2Lg \sin \alpha}$

2) b. Pentru studiul mișcării pe  $A_1A_2$ , în ipoteza că rezistența aerului este de forma  $\bar{R} = -km\bar{v}$ , ecuațiile de mișcare conduc la:

$$m\ddot{\bar{r}} = m\bar{g} - km\bar{v} \quad \text{sau} \quad \ddot{\bar{r}} = \bar{g} - k\bar{v} \quad (\text{n})$$

ecuațiile diferențiale ale mișcării în proiecții pe cele două axe sunt:

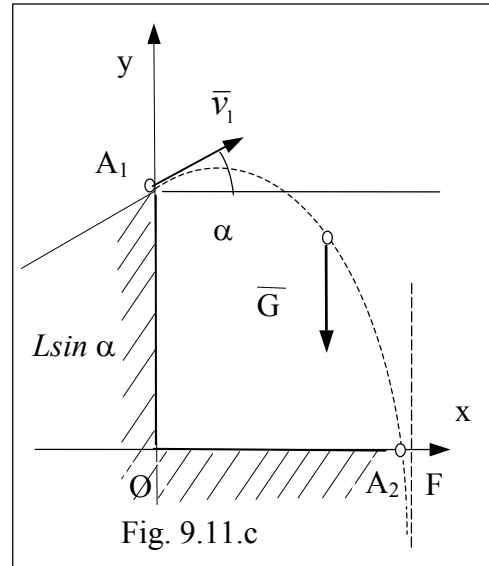
$$\begin{cases} \ddot{x} + k\dot{x} = 0 \\ \ddot{y} + k\dot{y} = -g \end{cases} \quad (\text{p})$$

Soluțiile generale ale ecuațiilor (p) sunt:

$$\begin{cases} x = C_1 + C_2 e^{-kt}; \\ y = C_3 + C_4 e^{-kt} - \frac{g}{k}t; \end{cases} \quad (\text{q})$$

Prin derivare rezultă vitezele

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -kC_2 e^{-kt}; \\ \dot{y} &= -kC_4 e^{-kt} - \frac{g}{k}; \end{aligned} \quad (\text{r})$$



Condițiile inițiale (poziția și viteza punctului în  $A_1$ ) sunt aceleași ca la punctul precedent:

$$\begin{aligned} x(0) = x_0 = 0, & \quad v_{0x} = \dot{x}(0) = v_1 \cos \alpha \\ y(0) = L \sin \alpha, & \quad v_{0y} = \dot{y}(0) = 0 \sin \alpha \end{aligned} \quad (\text{s})$$

Dacă se introduc în ecuațiile (q) și (r) se obțin constantele de integrare:

$$C_1 = -C_2 = -\frac{v_1 \cos \alpha}{k}, \quad C_3 = \frac{v_1 k \sin \alpha + g}{k^2} + L \sin \alpha,$$

$$C_4 = -\frac{v_1 k \sin \alpha + g}{k^2}$$

Ecuațiile (q) devin:

$$\begin{aligned} x &= \frac{v_1 \cos \alpha}{k} (1 - e^{-kt}) \\ y &= \frac{v_1 k \cos \alpha + g}{k^2} (1 - e^{-kt}) - \frac{g}{k}t + L \sin \alpha; \end{aligned} \quad (\text{t})$$

Eliminând timpul din primele două ecuații (t) se obține ecuația traiectoriei sub formă explicită:

$$y = \left(1 + \frac{g}{v_1 k \cos \alpha}\right)x + \frac{g}{k} \ln \left(1 - \frac{kx}{v_1 \cos \alpha}\right) + L \sin \alpha \quad (\text{u})$$

Se observă că curba traiectoriei admite o asimptotă verticală a cărei ecuație se deduce când  $t \rightarrow \infty$  în ecuațiile parametrice (t):

$$x = x_F = \frac{v_1 \cos \alpha}{k}. \quad (\text{v})$$

Prin derivarea relațiilor (t) se deduc componentele vitezei:

$$v_x = \dot{x} = v_1 \cos \alpha e^{-kt};$$

$$v_y = \dot{y} = \frac{v_1 k \cos \alpha + g}{k} e^{-kt} - \frac{g}{k}; \quad (w)$$

Deci viteza punctului se scrie:  $v = \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}$  (x)

**9.12. Se consideră** un punct material de masă  $m$  care se deplasează în planul vertical  $xOy$  sub acțiunea unei forțe orizontale proporțională cu depărtarea față de originea  $O$  a sistemului de axe considerat ( $\vec{F} = kx\vec{i}$ ). La momentul inițial ( $t=0$ ) pornește din punctul  $A_0$  situat pe axa  $Oy$ ,  $OA_0=h$ , cu viteza inițială  $v_0$  paralelă cu  $Ox$  (fig.9.12).

**Se cere** să se studieze mișcarea pe  $A_0A_1$ , distanța  $OA_1$  unde cade punctul, precum și viteza de impact în  $A_1$ .

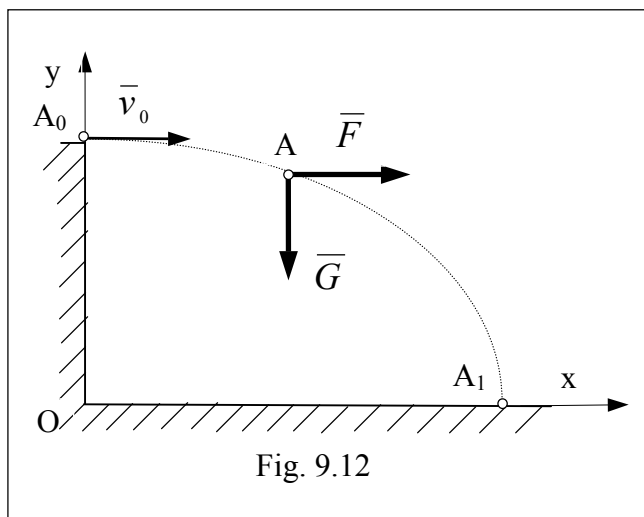


Fig. 9.12

**Rezolvare**

Pentru studiul mișcării în raport cu sistemul de axe  $Oxy$  din fig. 9.12, ecuațiile de mișcare se scriu:

$$m\ddot{\vec{r}} = m\vec{g} + \vec{F} \quad \text{sau} \quad (a)$$

$$\ddot{\vec{r}} = -g\vec{j} + \frac{k}{m}x\vec{i}$$

sau sub forma ecuațiilor diferențiale:

$$\begin{cases} \ddot{x} = \frac{k}{m}x \\ \ddot{y} = -g \end{cases} \quad (b)$$

unde dac se notează:  $\omega^2 = k/m$  conduce la:

$$\begin{cases} \ddot{x} - \omega^2 x = 0 \\ \ddot{y} = -g \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = C_1 e^{\omega t} + C_2 e^{-\omega t} \\ y = -g \frac{t^2}{2} + C_3 t + C_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = \omega C_1 e^{\omega t} - \omega C_2 e^{-\omega t} \\ \dot{y} = -gt + C_3 \end{cases} \quad (c)$$

Condițiile inițiale în  $A_0$  (poziția și viteza la momentul  $t = 0$ ) sunt:

$$\begin{aligned} x(0) = x_0 = 0, & \quad v_{0x} = \dot{x}(0) = v_0, \\ y(0) = h, & \quad v_{0y} = \dot{y}(0) = 0, \end{aligned} \quad (d)$$

Se obține sistemul de ecuații și constantele  $C_1, C_2, C_3, C_4$ :

$$\begin{cases} 0 = C_1 + C_2 \\ h = 0 + 0 + C_4 \\ v_0 = \omega(C_1 - C_2) \\ 0 = 0 + C_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = -C_2 = \frac{v_0}{2\omega} \\ C_3 = 0 \\ C_4 = h \end{cases} \quad (e)$$

Soluțiile particulare ale ecuațiilor mișcării sunt:

$$\begin{cases} x = \frac{v_0}{2\omega}(e^{\omega t} - e^{-\omega t}) = v_0 \sqrt{\frac{m}{k}} \cdot \text{sh}\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) \\ y = -g \frac{t^2}{2} + h \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{x} = v_0 \cdot \text{ch}\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) \\ \dot{y} = -gt \end{cases} \quad (\text{f})$$

Eliminând parametrul timp  $t$  din ecuațiile (f) se obține ecuația traiectoriei:

$$\begin{cases} t = \sqrt{\frac{2(h-y)}{g}} \\ x = v_0 \sqrt{\frac{m}{k}} \cdot \text{sh}\left(\sqrt{\frac{2k(h-y)}{mg}}\right) \end{cases} \quad (\text{g})$$

Punând condiția  $y=0$  se obține din (g) distanța  $OA_1$  unde cade punctul:

$$x_{A_1} = v_0 \sqrt{\frac{m}{k}} \cdot \text{sh}\left(\sqrt{\frac{2kh}{mg}}\right) \quad (\text{h})$$

Viteza într-un punct oarecare A al traiectoriei este:

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \sqrt{v_0^2 \cdot \text{ch}^2\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + g^2 t^2} \quad (\text{i})$$

Punând condiția  $y=0$  se obține din (f) timpul  $t_1 = \sqrt{2h/g}$  după care punctul ajunge în  $A_1$ . Înlocuind în expresia (i) se obține viteza de impact :

$$v_1 = \sqrt{v_0^2 \cdot \text{ch}^2\left(\sqrt{\frac{2kh}{mg}}\right) + 2gh} \quad (\text{j})$$

**9.13. Se consideră** un punct material de masă  $m$  care se deplasează în planul vertical  $xOy$  fiind atras de originea  $O$  de o forță proporțională cu depărtarea față de originea  $O$  a sistemului de axe considerat ( $\vec{F} = -mk^2 \vec{OA}$ ). La momentul inițial ( $t=0$ ) pornește din punctul  $A_0$  situat pe axa  $Oy$   $OA_0=h$ , cu viteza inițială  $v_0$  paralelă cu  $Ox$  (fig.9.13). **Se cere** să se studieze mișcarea pe  $A_0A_1$ , distanța  $OA_1$  unde cade punctul, precum și viteza de impact în  $A_1$ .

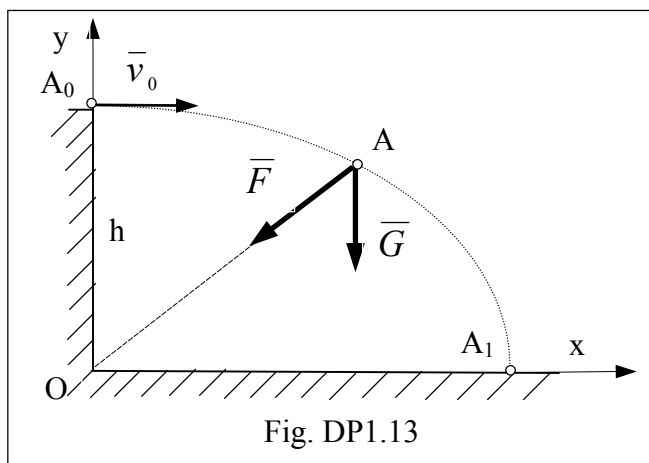


Fig. DP1.13

### Rezolvare

Pentru studiul mișcării în raport cu sistemul de axe  $Oxy$  din fig. 9.13, ecuațiile de mișcare se scriu:

$$m\ddot{\vec{r}} = m\vec{g} + \vec{F} \quad \text{sau} \quad (\text{a})$$

$$\ddot{\vec{r}} = -g\vec{j} - mk^2 x\vec{i} - mk^2 y\vec{j}$$

sau sub forma ecuațiilor diferențiale:

$$\begin{cases} \ddot{x} + k^2 x = 0 \\ \ddot{y} + k^2 y = -g \end{cases} \quad (b)$$

având soluții generale de forma:

$$\begin{cases} x = Ae^{ikt} + Be^{-ikt} \\ y = Ce^{ikt} + De^{-ikt} - \frac{g}{k^2} \end{cases} \quad \text{sau:} \quad \begin{cases} x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt \\ y = C_3 \cos kt + C_4 \sin kt - \frac{g}{k^2} \end{cases} \quad (c)$$

respectiv derivatele: 
$$\begin{cases} \dot{x} = -kC_1 \sin kt + kC_2 \cos kt \\ \dot{y} = -kC_3 \sin kt + kC_4 \cos kt \end{cases} \quad (d)$$

Condițiile inițiale în  $A_0$  (poziția și viteza la momentul  $t = 0$ ) sunt:

$$\begin{aligned} x(0) = x_0 = 0, \quad v_{0x} = \dot{x}(0) = v_0, \\ y(0) = h, \quad v_{0y} = \dot{y}(0) = 0, \end{aligned} \quad (e)$$

Se obține sistemul de ecuații și constantele  $C_1, C_2, C_3, C_4$ :

$$\begin{cases} 0 = C_1 \\ h = C_3 - \frac{g}{k^2} \end{cases} \quad \begin{cases} v_0 = kC_2 \\ 0 = kC_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 0 \\ C_2 = \frac{v_0}{k} \end{cases} \quad \begin{cases} C_3 = h + \frac{g}{k^2} \\ C_4 = 0 \end{cases} \quad (f)$$

Soluțiile particulare ale ecuațiilor mișcării sunt:

$$\begin{cases} x = \frac{v_0}{k} \sin kt \\ y = \left( h + \frac{g}{k^2} \right) \cos kt - \frac{g}{k^2} \end{cases}; \quad \begin{cases} \dot{x} = v_0 \cos kt \\ \dot{y} = -\left( kh + \frac{g}{k} \right) \sin kt \end{cases} \quad (g)$$

Eliminând parametrul timp  $t$  din ecuațiile (g) se obține ecuația traiectoriei:

$$\frac{x^2}{\left( \frac{v_0}{k} \right)^2} + \frac{\left( y + \frac{g}{k^2} \right)^2}{\left( h + \frac{g}{k^2} \right)^2} = 1 \quad (h)$$

Punând condiția  $y=0$  se obține din (h) distanța  $OA_1$  unde cade punctul:

$$x_{A_1} = \frac{v_0}{k} \sqrt{1 - \frac{g^2}{(k^2 h + g)^2}} \quad (h)$$

Viteza într-un punct oarecare A al traiectoriei este:

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \sqrt{v_0^2 \cdot \cos^2 kt + \left( kh + \frac{g}{k} \right)^2 \sin^2 kt} \quad (i)$$

Punând condiția  $y=0$  se obține din (g) timpul  $t_1 = \arccos \frac{g}{g + k^2 h}$ , după

care punctul ajunge în  $A_1$ . Înlocuind în expresia se obține viteza de impact :

$$v_1 = \sqrt{v_0^2 \cdot \frac{g^2}{(g + k^2 h)^2} + (g + k^2 h)(k^2 h^2 - 2gh)} \quad (j)$$

**9.14. Se consideră** o sferă  $M$  de greutate  $G=mg$  legată printr-un fir inextensibil de un punct fix  $A$ , care descrie o circumferință orizontală, având viteza constantă  $v_0$ . **Se cere** să se determine: tensiunea din fir  $S$ , viteza sferei și timpul  $T$  în care aceasta descrie o circumferință completă, dacă se cunoaște lungimea firului  $L$  și unghiul  $\alpha$  dintre fir și verticala care trece prin  $A$ . (fig.9.14).

**Rezolvare**

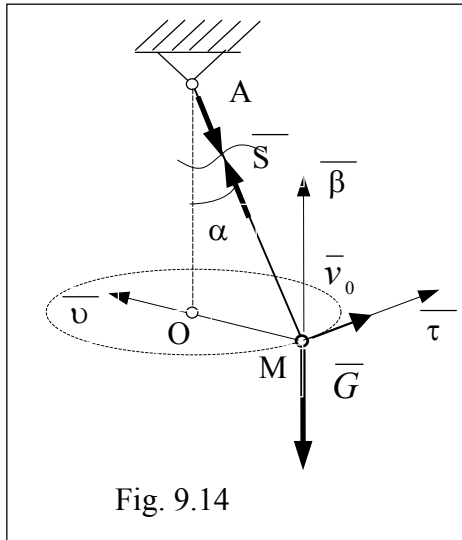


Fig. 9.14

Ecuția vectorială a mișcării se scrie:

$$m\ddot{\vec{r}} = m\vec{g} + \vec{S} \tag{a}$$

Pentru studiul mișcării se proiectează ecuația (a) pe axele sistemului Frenet (naturale) ca în fig. 9.14, sub forma:

$$\begin{cases} m\dot{v} = 0 \\ m \frac{v^2}{\rho} = S \sin \alpha \\ 0 = S \cos \alpha - mg \end{cases} \tag{b}$$

Din prima ecuație rezultă  $v=v_0=const$

Din ultima ecuație rezultă: 
$$S = \frac{mg}{\cos \alpha} = const. \tag{c}$$

Înlocuind în a doua ecuație raza de curbură  $\rho = L \sin \alpha$ , se obține:

$$v^2 = \frac{SL \sin^2 \alpha}{m} = \frac{Lg \sin^2 \alpha}{\cos \alpha} \text{ sau:}$$

$$v = \sqrt{\frac{Lg \sin^2 \alpha}{\cos \alpha}} \quad (= v_0 = constant) \tag{d}$$

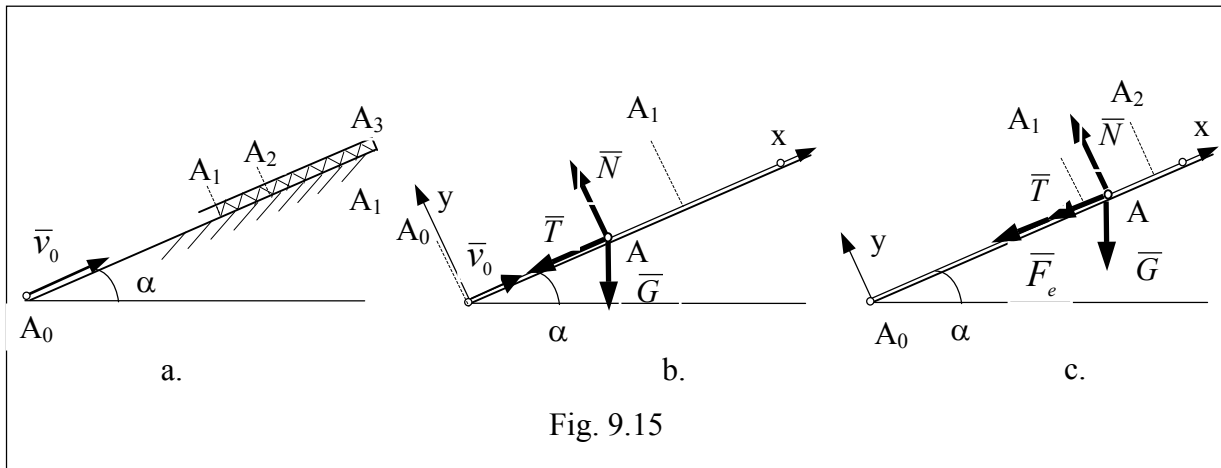
Perioada mișcării este raportul dintre lungimea cercului ( $L \sin \alpha$ ) și viteza:

$$T = \frac{2\pi \cdot L \sin \alpha}{v} = 2\pi \sqrt{\frac{L \cos \alpha}{g}} \tag{e}$$

**9.15. Se consideră** un punct material (o bilă) de masă  $m$  care pleacă din  $A_0$  în tubul  $A_0A_3$  înclinat cu unghiul  $\alpha$  cu viteza inițială  $v_0$ , cu frecare ( $\mu \neq 0$ ). Când ajunge în  $A_1$  atinge capătul unui resort de constantă elastică  $k$ , pe care îl comprimă (fig. 9.15.a). **Se cere** să se determine lungimea de comprimare  $L$ , dacă se cunosc:  $\alpha, \mu, k, a=A_0A_1$

**Rezolvare:**

Forțele care acționează pe cele două tronsoane  $A_0A_1$  și  $A_1A_2$  sunt reprezentate în fig. 9.15. b și c.



a. Pe primul tronson  $A_0A_1$  se aplică teorema de variație a energiei cinetice:

$$E_1 - E_0 = L_{0-1} \quad , \quad (a)$$

unde:  $E_0 = \frac{1}{2}mv_0^2$  ,  $E_1 = \frac{1}{2}mv_1^2$  (b)

$$L_{0-1} = \int_{0-a} \bar{F} \cdot d\bar{r} = \int_{0-a} [(-G\sin\alpha - T)\bar{i} + (-G\cos\alpha + N)\bar{j}] \cdot (dx\bar{i})$$

$$L_{0-1} = (-G\sin\alpha - T)a$$

Întrucât  $T = \mu N = \mu mg \cos\alpha$  , se obține viteza în punctul  $A_1$ :

$$v_1 = \sqrt{v_0^2 - 2ag(\sin\alpha + \mu \cos\alpha)} \quad (c)$$

b. Pe al doilea tronson  $A_1A_2$  se aplică tot teorema de variație a energiei cinetice:

$$E_2 - E_1 = L_{1-2} \quad ,$$

unde:  $E_1 = \frac{1}{2}mv_1^2$  ,  $E_2 = 0$  (d)

$$L_{1-2} = \int_{0-L} \bar{F} \cdot d\bar{r} = \int_{0-L} [(-G\sin\alpha - T - F_e)\bar{i} + (-G\cos\alpha + N)\bar{j}] \cdot (dx\bar{i})$$

unde:  $F_e = kx$  iar lucrul mecanic al forței elastice a arcului este

$$dL_e = -F_e dx = -kx dx \Rightarrow L_e = -\int_0^L kx dx = -\frac{kL^2}{2}$$

$$L_{1-2} = (-G\sin\alpha - T)L - \frac{kL^2}{2}$$

Rezultă o ecuație de gradul II în  $L$ :

$$kL^2 + 2mg(\sin\alpha + \mu \cos\alpha)L - mv_1^2 = 0 \text{ având soluția:}$$

$$L = \frac{-mg(\sin\alpha + \mu \cos\alpha) + \sqrt{[mg(\sin\alpha + \mu \cos\alpha)]^2 + mkv_1^2}}{k} \quad (e)$$

unde  $v_1$  este dat de relația (c).



**9.16. Se consideră un punct material de masă  $m$  care se deplasează pe un plan înclinat cu unghiul  $\alpha$ , cu frecare ( $\mu \neq 0$ ) și rezistența aerului de forma  $\bar{R} = -kmgv^2 \frac{\bar{v}}{|\bar{v}|}$ , pornind din  $A_0$  cu viteza inițială  $v_0$ . Se cere să se determine viteza cu care trece corpul prin poziția inițială  $A_0$ , la înapoiere.**

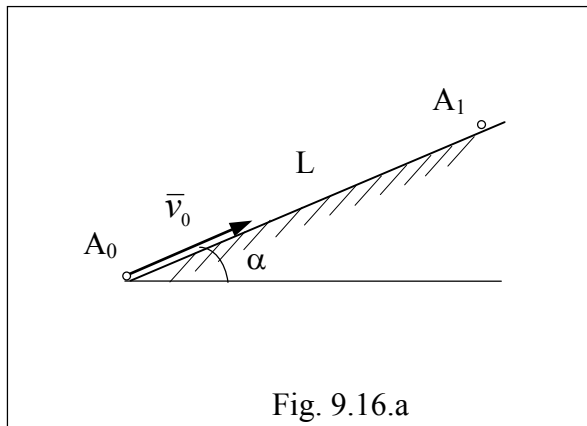


Fig. 9.16.a

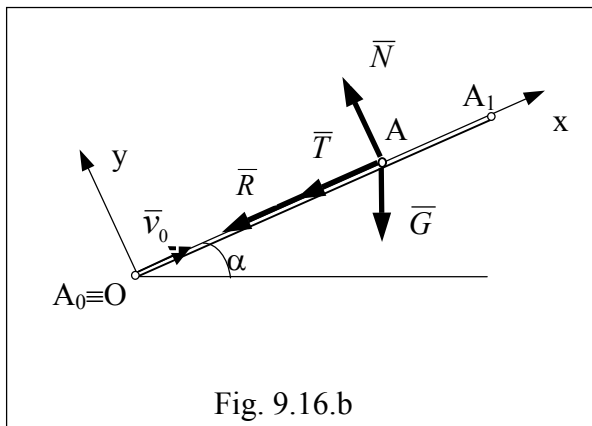


Fig. 9.16.b

**Rezolvare:**

a) pentru urcare se alege sistemul de axe  $Oxy$  cu originea în  $A_0$  și axa  $Ox$  pe direcția planului în sensul mișcării, ca în *fig. 9.16.b* și se eliberează punctul de legături introducându-se forțele de legătură  $\bar{N}$ ,  $\bar{R}$  și  $\bar{T}$  ( $T = \mu N$ ). Ecuația diferențială a mișcării pe  $A_0A_1$ , în proiecții pe axe se scrie:

$$m\ddot{x} = -mg\sin\alpha - T - kmgv^2; \tag{a}$$

$$m\ddot{y} = -mg\cos\alpha + N, \tag{b}$$

Condiția geometrică se scrie:  $y = 0$  ( $\dot{y} = 0$ ;  $\ddot{y} = 0$ ) (b)

Condiția fizică a frecării este:  $T = \mu N$ , (c)

rezultă:  $\ddot{x} = -g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha) - kv^2$  (d)  
 $N = mg\cos\alpha$

Dacă în prima ecuație (b) se face substituția:

$$\ddot{x} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = v \frac{dv}{dx} \tag{e}$$

rezultă o ecuație diferențială cu variabile separabile:

$$v \frac{dv}{dx} = -g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha + kv^2) \tag{f}$$

sau  $\frac{d(\sin\alpha + \mu\cos\alpha + kv^2)}{(\sin\alpha + \mu\cos\alpha + kv^2)} = -2gk \cdot dx$  (g)

având soluția:  $\ln(\sin\alpha + \mu\cos\alpha + kv^2) = -2gkx + C$  (h)

Dacă se introduc condițiile la momentul inițial ( $t = 0$ ):

$$x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = v_0,$$

rezultă constanta de integrare:  $C = \ln(\sin\alpha + \mu\cos\alpha + kv_0^2)$

Se obține legea de mișcare sub forma:

$$x = \frac{1}{2gk} \ln \frac{\sin \alpha + \mu \cos \alpha + kv_0^2}{\sin \alpha + \mu \cos \alpha + kv^2} \quad (i)$$

În punctul  $A_1$  avem condițiile:  $x_1 = L$  și  $v_1 = 0$ , rezultă

$$L = \frac{1}{2gk} \ln \left( 1 + \frac{kv_0^2}{\sin \alpha + \mu \cos \alpha} \right) \quad (j)$$

b. La întoarcere avem următoarele ecuații diferențiale proiectate pe noile axe

$Ox$  și  $Oy$  ( $O \equiv A_1$ ):

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= mg \sin \alpha - T - kmgv^2; \\ m\ddot{y} &= -mg \cos \alpha + N, \end{aligned} \quad (k)$$

Dacă se introduc condiția geometrică:

$y = 0$  ( $\dot{y} = 0$ ;  $\ddot{y} = 0$ ) și condiția fizică a

frecării ( $T = \mu N$ ), rezultă :

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha) - kgv^2 \\ N &= mg \cos \alpha \end{aligned} \quad (l)$$

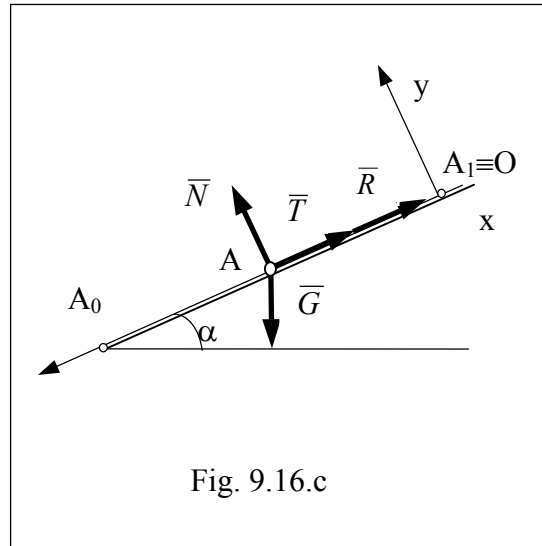


Fig. 9.16.c

Dacă în prima ecuație (l) se face substituția:  $\ddot{x} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = v \frac{dv}{dx}$ ,

se obține analog o ecuație diferențială cu variabile separabile:

$$v \frac{dv}{dx} = g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha - kv^2) \quad (m)$$

având soluția:  $\ln(kv^2 + \mu \cos \alpha - \sin \alpha) = -2gkx + C$  (n)

Dacă se introduc condițiile la momentul inițial ( $t = 0$ ):  $x(0) = 0$ , și  $\dot{x}(0) = v_1 = 0$ , rezultă constanta de integrare:  $C = \ln(\mu \cos \alpha - \sin \alpha)$

Se obține legea de mișcare sub forma:

$$x = \frac{1}{2gk} \ln \frac{\mu \cos \alpha - \sin \alpha}{kv^2 + \mu \cos \alpha - \sin \alpha} \quad (o)$$

În punctul  $A_0$  vom avea în acest caz condițiile:  $x_f = L$  și  $v = v_{0f}$ , rezultă

$$L = \frac{1}{2gk} \ln \frac{\mu \cos \alpha - \sin \alpha}{kv_{0f}^2 + \mu \cos \alpha - \sin \alpha} \quad (p)$$

Egalând cele două expresii obținute pentru  $L$  (j) și (p) se obține  $v_{0f}$ :

$$v_{0f} = v_0 \sqrt{\frac{\sin \alpha - \mu \cos \alpha}{kv_0^2 + \mu \cos \alpha + \sin \alpha}} \quad (q)$$

## CAPITOLUL X CINEMATICA RIGIDULUI ȘI A SISTEMELOR DE RIGIDE

**10.1.** *Se consideră mecanismul format din cinci bare articulate (vezi fig.10.1, unde  $O_1, O_2, O_3$  sunt articulații fixe iar  $A, B, C, D$  articulații mobile).*

*Se cunosc:  $O_1A = O_2B = r$ ;  $O_2C = O_3D = R$ ;  $O_1O_2 = O_2O_3 = AB = CD = \ell > R$ ; viteza unghiulară a manivelei  $O_1A$  este  $\omega = \text{constant}$ . Se cere să se calculeze și să se reprezinte grafic viteza și accelerația punctelor  $A, B, C, D, M, N$ .*

### Rezolvare

Patrulateralele  $O_1ABO_2$  și  $O_2CDO_3$  rămân tot timpul paralelograme cu laturile  $O_1O_2$  și  $O_2O_3$  fixe, barele  $O_1A$ ,  $O_2B$  și  $O_3D$  au o mișcare de rotație, iar barele  $AB$  și  $CD$  o mișcare de translație, deoarece rămân tot timpul paralele cu  $O_1O_2$  și  $O_2O_3$  (fixe)

Avem prin urmare :

$$v_A = \omega \cdot O_1A = \omega \cdot r$$

$$\text{dar } \omega = \text{const} \Rightarrow \varepsilon = 0$$

$$a_A^r = \varepsilon \cdot O_1A = 0$$

$$a_A^v = \omega^2 \cdot O_1A = \omega^2 \cdot r$$

$$\Rightarrow a_A = a_A^v = \omega^2 \cdot r$$

Deci :

$$v_A = v_B = v_M = \omega \cdot r$$

$$a_A = a_B = a_M = \omega^2 \cdot r$$

Bara  $O_2C$  are aceeași viteză unghiulară:

$$\omega = \text{const} \text{ ca și } O_1A,$$

deci:

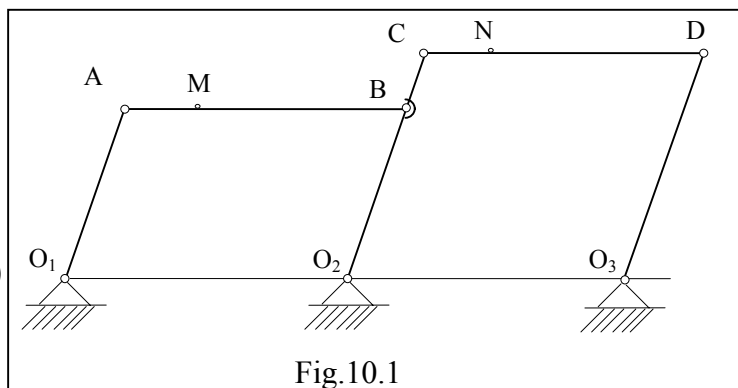
$$v_C = \omega \cdot O_2C = \omega \cdot R$$

$$a_C = \omega^2 \cdot O_2C = \omega^2 \cdot R$$

Analog, avem :

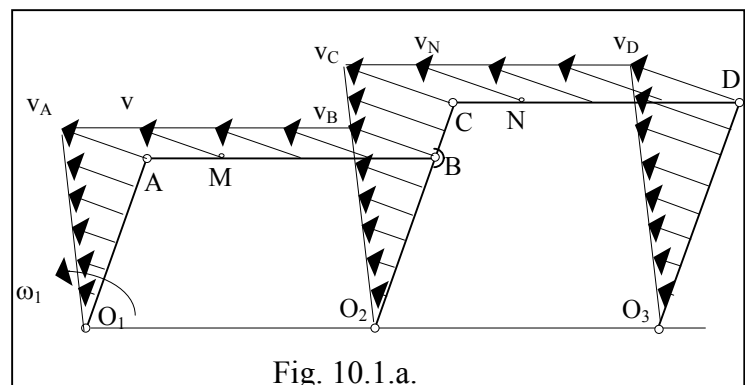
$$v_C = v_D = v_N$$

$$a_C = a_D = a_N$$



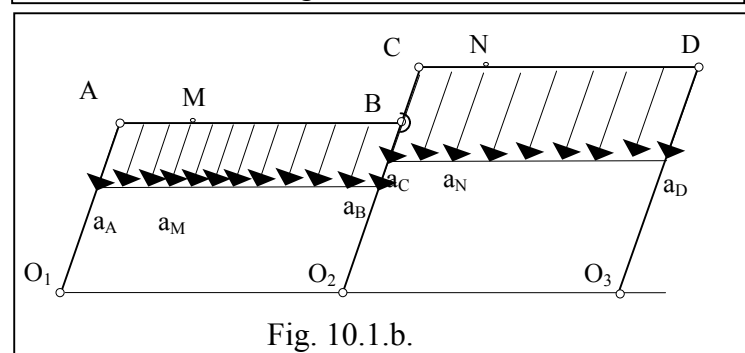
(a)

Fig.10.1



(b)

Fig. 10.1.a.



(c)

(d)

Fig. 10.1.b.

**10.2** *Se consideră un cub de muchie  $a$ , care se rotește în jurul diagonalei principale  $OB'$  cu viteza unghiulară  $\omega = 2\sqrt{3}\varepsilon_0 t$  (fig.10.2).*

*Se cer:* 1) viteza și accelerația punctului  $B$

2) vitezele și accelerațiile punctelor  $A, A', C, C', O'$

**Rezolvare**

Se folosesc formulele lui Euler:

$$\bar{v}_1 = \bar{v}_0 + \bar{\omega} \times \bar{r}$$

$$\bar{a}_1 = \bar{v}_0 + \bar{\varepsilon} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r})$$

Se alege sistemul de axe mobil ( $Oxyz$ )

după muchiile cubului (ca în fig. 10.1).

Întrucât  $\bar{v}_0 = 0$ ;  $\bar{a}_0 = 0$ , relația (a) se scrie:

$$\bar{v}_{1B} = \bar{\omega} \times \bar{r}_B;$$

$$\bar{a}_{1B} = \bar{\varepsilon} \times \bar{r}_B + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}_B) = \bar{\varepsilon} \times \bar{r}_B + \bar{\omega} \times \bar{v}_{1B}$$

unde:

$$\bar{r}_B = \overline{OB} = a(\bar{i} + \bar{j})$$

$$\bar{\omega} = \omega \cdot \text{vers} \overline{OB'} = 2\varepsilon_0 t(\bar{i} + \bar{j} + \bar{k})$$

$$\bar{\varepsilon} = \dot{\bar{\omega}} = 2\varepsilon_0(\bar{i} + \bar{j} + \bar{k});$$

Viteza punctului B:

$$\bar{v}_{1B} = 2\varepsilon_0 t \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ a & a & 0 \end{vmatrix} = 2\varepsilon_0 at(-\bar{i} + \bar{j}) \Rightarrow v_{1B} = \sqrt{v_{1Bx}^2 + v_{1By}^2 + v_{1Bz}^2} = 2\sqrt{2}a\varepsilon_0 t;$$

$$\cos(\bar{v}_{1B}, \bar{i}) = \frac{v_{1Bx}}{v_{1B}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}; \quad \cos(\bar{v}_{1B}, \bar{j}) = \frac{v_{1By}}{v_{1B}} = \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad \cos(\bar{v}_{1B}, \bar{k}) = 0$$

Accelerația punctului B:

$$\bar{a}_{1B} = 2\varepsilon_0 \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ a & a & 0 \end{vmatrix} + 4\varepsilon_0^2 at^2 \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\bar{a}_{1B} = -2a\varepsilon_0(1 + 2\varepsilon_0 t^2)\bar{i} + 2a\varepsilon_0(1 - 2\varepsilon_0 t^2)\bar{j} + 8a\varepsilon_0^2 t^2 \bar{k}$$

$$a_{1B} = \sqrt{a_{1Bx}^2 + a_{1By}^2 + a_{1Bz}^2};$$

$$\cos(\bar{a}_{1B}, \bar{i}) = \frac{a_{1Bx}}{a_{1B}}; \quad \cos(\bar{a}_{1B}, \bar{j}) = \frac{a_{1By}}{a_{1B}}; \quad \cos(\bar{a}_{1B}, \bar{k}) = \frac{a_{1Bz}}{a_{1B}}$$

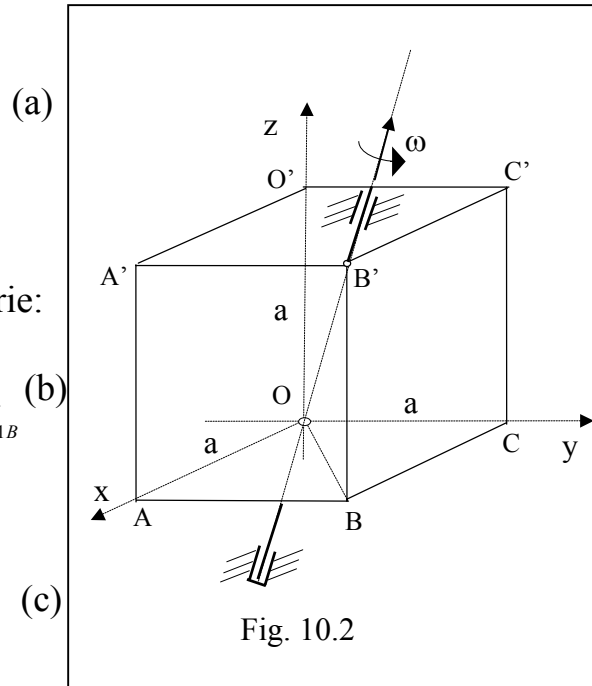


Fig. 10.2

Pentru găsirea vitezei și accelerației punctelor  $A, A', C, C', O'$  se procedează în mod analog:  $\bar{v}_1 = \bar{\omega} \times \bar{r}$ ;  $\bar{a}_1 = \bar{\varepsilon} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times \bar{v}_1$ , unde vectorii de poziție ai punctelor specificate au expresiile:

$$\begin{aligned} \bar{r}_A &= \overline{OA} = a\bar{i}; & \bar{r}_{A'} &= \overline{OA'} = a(\bar{i} + \bar{k}); & \bar{r}_C &= \overline{OC} = a\bar{j} \\ \bar{r}_{C'} &= \overline{OC'} = a(\bar{j} + \bar{k}); & \bar{r}_{O'} &= \overline{OO'} = a\bar{k} \end{aligned} \quad (f)$$

Vitezele punctelor specificate se calculează astfel:

$$\begin{aligned} \bar{v}_{1A} &= 2\varepsilon_0 t \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ a & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2\varepsilon_0 at(\bar{j} - \bar{k}); & \bar{v}_{1A'} &= 2\varepsilon_0 t \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ a & 0 & a \end{vmatrix} = 2\varepsilon_0 at(\bar{i} - \bar{k}) \\ \bar{v}_{1C} &= 2\varepsilon_0 t \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & a & 0 \end{vmatrix} = 2\varepsilon_0 at(-\bar{i} + \bar{k}); & \bar{v}_{1C'} &= 2\varepsilon_0 t \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & a & a \end{vmatrix} = 2\varepsilon_0 at(-\bar{j} + \bar{k}) \\ \bar{v}_{1O'} &= 2\varepsilon_0 t \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a \end{vmatrix} = 2\varepsilon_0 at(\bar{i} - \bar{j}) \end{aligned} \quad (g)$$

Accelerațiile punctelor specificate se calculează astfel:

$$\begin{aligned} \bar{a}_{1A} &= 2\varepsilon_0 \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ a & 0 & 0 \end{vmatrix} + 4\varepsilon_0^2 at^2 \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2a\varepsilon_0(\bar{j} - \bar{k}) + 4a\varepsilon_0^2 t^2(-2\bar{i} + \bar{j} + \bar{k}) \\ \bar{a}_{1A'} &= 2\varepsilon_0 \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ a & 0 & a \end{vmatrix} + 4\varepsilon_0^2 at^2 \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 2a\varepsilon_0(\bar{i} - \bar{k}) + 4a\varepsilon_0^2 t^2(-\bar{i} + 2\bar{j} - \bar{k}) \\ \bar{a}_{1C} &= 2\varepsilon_0 \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & a & 0 \end{vmatrix} + 4\varepsilon_0^2 at^2 \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2a\varepsilon_0(-\bar{i} + \bar{k}) + 4a\varepsilon_0^2 t^2(\bar{i} - 2\bar{j} + \bar{k}) \\ \bar{a}_{1C'} &= 2\varepsilon_0 \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & a & a \end{vmatrix} + 4\varepsilon_0^2 at^2 \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2a\varepsilon_0(-\bar{j} + \bar{k}) + 4a\varepsilon_0^2 t^2(2\bar{i} - \bar{j} - \bar{k}) \\ \bar{a}_{1O'} &= 2\varepsilon_0 \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a \end{vmatrix} + 4\varepsilon_0^2 at^2 \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -2a\varepsilon_0(\bar{i} - \bar{j}) + 4a\varepsilon_0^2 t^2(\bar{i} + \bar{j} - 2\bar{k}) \end{aligned} \quad (h)$$

**10.3** *Se consideră paralelipipedul dreptunghic având muchiile:  $OA = a$ ,  $OC = 2a$ ,  $OO' = 3a$  (fig.10.3) care se rotește în jurul axei  $OC'$  cu viteza unghiulară  $\omega = \sqrt{13}\varepsilon_0 t$ . **Se cere:** viteza și accelerația punctului  $B'$ .*

**Rezolvare**

Se aleg axele sistemului mobil ( $Oxyz$ ) după muchiile paralelipipedului dreptunghic (fig.10.3) ; întrucât  $\bar{v}_0 = 0$ ;  $\bar{a}_0 = 0$ , viteza și accelerația punctului  $B'$  se calculează cu formulele:

$$\bar{v}_{1B'} = \bar{\omega} \times \overline{OB'} ; \bar{a}_{1B'} = \bar{\varepsilon} \times \overline{OB'} + \bar{\omega} \times \bar{v}_{B'} \quad (a)$$

Întrucât avem :

$$\overline{OB'} = a\bar{i} + 2a\bar{j} + 3a\bar{k}$$

$$\bar{\omega} = \omega \text{ vers } \overline{OC'} = \omega \frac{\overline{OC'}}{|\overline{OC'}|} = \varepsilon_0 t (2\bar{j} + 3\bar{k}) \quad (b)$$

$$\bar{\varepsilon} = \dot{\bar{\omega}} = \varepsilon_0 (2\bar{j} + 3\bar{k})$$

Relația (a) se scrie:

- Pentru viteza punctului  $B'$ :

$$\bar{v}_{1B'} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 2 & 3 \\ a & 2a & 3a \end{vmatrix} \varepsilon_0 t = \varepsilon_0 at (3\bar{j} - 2\bar{k})$$

$$\Rightarrow \begin{cases} v_{1B'x} = 0 \\ v_{1B'y} = 3\varepsilon_0 at \\ v_{1B'z} = -2\varepsilon_0 at \end{cases} \Rightarrow v_{1B'} = \sqrt{v_{1B'x}^2 + v_{1B'y}^2 + v_{1B'z}^2} = \sqrt{13}\varepsilon_0 at$$

$$\cos(\bar{v}_{1B'}, \bar{i}) = \frac{v_{1B'x}}{v_{1B'}} = 0; \cos(\bar{v}_{1B'}, \bar{j}) = \frac{v_{1B'y}}{v_{1B'}} = \frac{3}{\sqrt{13}}; \cos(\bar{v}_{1B'}, \bar{k}) = \frac{v_{1B'z}}{v_{1B'}} = -\frac{2}{\sqrt{13}}$$

- Pentru accelerația punctului  $B'$  :

$$\bar{a}_{1B'} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \varepsilon_0 a + \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & -2 \end{vmatrix} \varepsilon_0 t \cdot \varepsilon_0 at = -13\varepsilon_0^2 at^2 \bar{i} + \varepsilon_0 a (3\bar{j} - 2\bar{k}) \quad (d)$$

$$\Rightarrow a_{1B'} = a\varepsilon_0 \sqrt{13(1 + 13\varepsilon_0^2 t^4)}$$

$$\cos(\bar{a}_{1B'}, \bar{i}) = \frac{a_{1B'x}}{a_{1B'}} = \frac{-13\varepsilon_0^2 t^2}{\sqrt{13(1 + 13\varepsilon_0^2 t^4)}}; \cos(\bar{a}_{1B'}, \bar{j}) = \frac{a_{1B'y}}{a_{1B'}} = \frac{3}{\sqrt{13(1 + 13\varepsilon_0^2 t^4)}}$$

$$\cos(\bar{a}_{1B'}, \bar{k}) = \frac{a_{1B'z}}{a_{1B'}} = -\frac{2}{\sqrt{13(1 + 13\varepsilon_0^2 t^4)}}$$

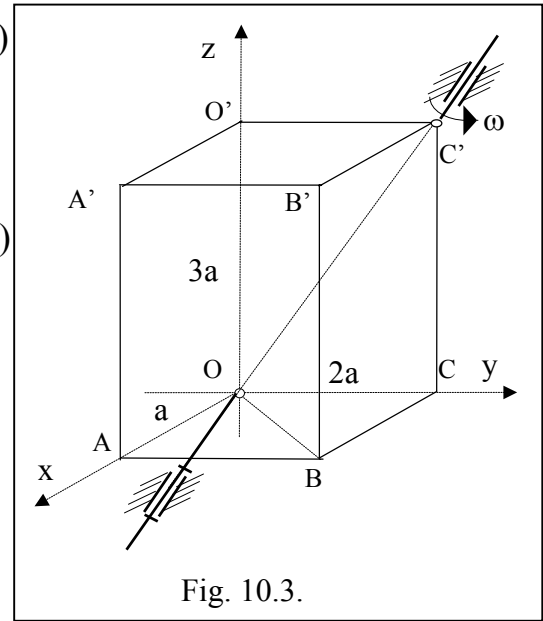


Fig. 10.3.

(c)

Temă: Să se determine vitezele și accelerațiile punctelor:  $B B' A A' O' C$

**10.4** *Se consideră un șurub având diametrul  $D = 20\text{cm}$  și pasul  $p = 4\text{mm}$ . Șurubul începe să se rotească într-o piuliță, pornind din repaus, cu viteza unghiulară  $\omega = 2t$  ( $s^{-1}$ ). Se cere viteza și accelerația unui punct situat pe periferia șurubului la momentul  $t_1 = 10\text{s}$ .*

**Rezolvare:**

Mișcarea șurubului este o mișcare elicoidală compusă dintr-o o mișcare de rotație în jurul axului șurubului și o mișcare de translație dealungul axului:

$$v = \sqrt{v_{tr}^2 + v_{rot}^2}; \quad \text{unde: } v_{tr} = v_0 = \frac{p\omega}{2\pi}; \quad v_{rot} = R\omega \quad (a)$$

$$a = \sqrt{a_{tr}^2 + a_{rot}^2}; \quad \text{unde: } a_{tr} = \frac{p\varepsilon}{2\pi}; \quad a_{rot} = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$$

Prin urmare, vizea și accelerația unui punct aflat la periferia lui este:

$$v = \omega \sqrt{\frac{p^2}{(2\pi)^2} + R^2}; \quad a = \sqrt{\left(\frac{p\varepsilon}{2\pi}\right)^2 + R^2(\varepsilon^2 + \omega^4)} \quad (b)$$

Vieza și accelerația punctului la momentul  $t_1 = 10\text{s}$  când avem:

$$\omega_1 = 20s^{-1}, \quad \varepsilon_1 = 2s^{-2}, \quad \text{este: } v_1 = 2m/s \quad \text{și} \quad a_1 \approx 40m/s^2. \quad (c)$$

**10.5** *Se consideră un șurub având raza exetrioară  $R$  și pasul  $p = 4\text{mm}$ . Șurubul începe să se rotească într-o piuliță fixă, pornind din repaus, astfel încât deplasarea în lungul axei se face cu o accelerație constantă  $a_0$ . Se cer viteza și accelerația unui punct situat pe periferia șurubului la momentul  $t$ .*

**Rezolvare:**

Mișcarea șurubului este elicoidală (rototranslație) :

➤ Pentru mișcarea de translație dealungul axului avem:

$$v_{tr} = v_0 = a_0 t \quad (a)$$

$$a_{tr} = a_0$$

➤ Pentru mișcare de rotație

$$v_{rot} = R\omega = R \cdot \frac{2\pi}{p} v_0 = \frac{2\pi R a_0 t}{p}; \quad (b)$$

$$a_{rot}^n = R\omega^2 = R \cdot \left(\frac{2\pi}{p} a_0 t\right)^2; \quad a_{rot}^t = \frac{dv_{rot}}{dt} = \frac{2\pi R a_0}{p}$$

Prin urmare, vizea și accelerația unui punct aflat la periferia lui este:

$$v = \sqrt{v_{tr}^2 + v_{rot}^2} = a_0 t \sqrt{\left(\frac{2\pi R}{p}\right)^2 + 1}; \quad (c)$$

$$a = \sqrt{(a_{tr})^2 + (a_{rot}^n)^2 + (a_{rot}^t)^2} = a_0 \sqrt{1 + \left(\frac{2\pi R}{p}\right)^2 + R^2 \left(\frac{2\pi t}{p}\right)^4}$$

**10.6.** *Se consideră o bară OA de lungime  $\ell$  se deplasează într-un plan vertical cu extremitatea O pe semicercul de rază R, rezemându-se tot timpul în B (fig.10.6.a). Se cunosc viteza de deplasare a punctului O,  $v_0 = \text{constant}$ . Se cer: Ecuațiile Bazei și Rostogolitoarei mișcării și vitezele punctelor A și B ale barei.*

**Rezolvare:**

Se duc perpendiculare pe direcțiile vitezelor aplicate în O și B, intersecția acestor perpendiculare determină centrul instantaneu de rotație (C.I.R), pe care îl notăm cu I. Se aleg axele fixe  $O_1x_1y_1$  și mobile Oxyz ca în figură și parametrul mișcării unghiul dintre  $O_1x_1$  și Ox notat cu  $\varphi = \varphi(t)$ . Pentru determinarea Bazei și a Rostogolitoarei vom folosi două metode:

**a. Metoda geometrică**

Proiectând punctul I pe axele fixe ( $O_1x_1y_1$ ) (fig.10.6.b). obținem ecuațiile parametrice ale Bazei:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= O_1D = R \cos 2\varphi \\ \eta_1 &= DI = R \sin 2\varphi \end{aligned} \tag{a}$$

Eliminând parametrul  $\varphi$  din ecuațiile (a) se obține ecuația explicită a Bazei:  $\xi_1^2 + \eta_1^2 = R^2$  care reprezintă un cerc cu centrul în  $O_1$  de rază R.

Proiectând punctul I pe axele mobile (Oxy) (fig. 10.6.b). se obțin ecuațiile parametrice ale Rostogolitoarei:

$$\begin{aligned} \xi &= OB = 2R \cos \varphi \\ \eta &= IB = 2R \sin \varphi \end{aligned} \tag{b}$$

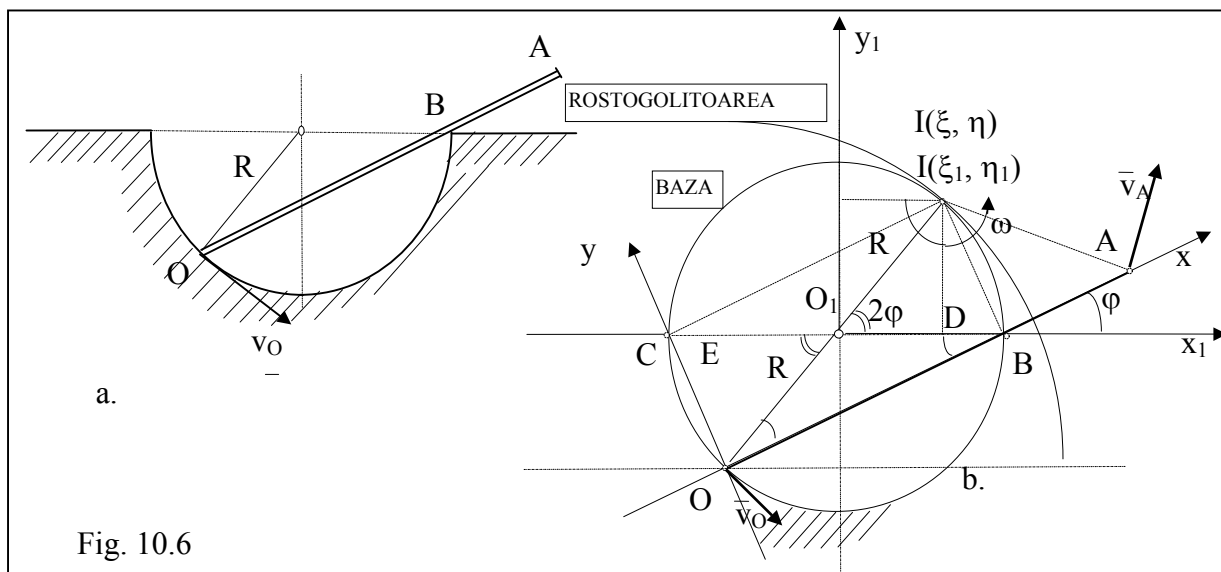


Fig. 10.6

Eliminând parametrul  $\varphi$  din ecuațiile (b) se obține ecuația explicită a Rostogolitoarei:  $\xi^2 + \eta^2 = 4R^2$

și care reprezintă un cerc cu centrul în O, de rază 2R



**b. Metoda grafo-analitică**

Se vor folosi ecuațiile parametrice ale Rostogolitoarei și bazei obținute analitic :

➤ pentru Rostogolitoare: 
$$\begin{cases} \xi = -v_{0y} / \omega \\ \eta = v_{0x} / \omega \end{cases} \quad (d)$$

➤ pentru Bază: 
$$\begin{cases} \xi_1 = x_0 + \xi \cos \varphi - \eta \sin \varphi \\ \eta_1 = y_0 + \xi \sin \varphi + \eta \cos \varphi \end{cases} \quad (e)$$

Se observă că legea de mișcare a punctului O (originea sistemului mobil) se poate scrie:  $s = \text{arc}CO = R \cdot 2\varphi \quad (f)$

Derivând expresia (e) în raport cu timpul , se obține:

$$\dot{s} = 2R\dot{\varphi} \quad \text{sau} \quad v_0 = 2R\omega \quad \text{adică:} \quad \omega = v_0 / 2R; \quad (g)$$

Coordonatele punctului O față de sistemul fix se scriu:

$$\begin{aligned} x_0 &= -O_1E = -O_1O \cos 2\varphi = -R \cos 2\varphi \\ y_0 &= -EO = -O_1O \sin 2\varphi = -R \sin 2\varphi \end{aligned} \quad (h)$$

Proiecțiile vitezei  $v_0$  pe axele mobile se scriu din fig. 10.6 astfel:

$$v_{0x} = v_0 \sin \varphi; \quad v_{0y} = -v_0 \cos \varphi \quad (i)$$

Înlocuind acestea în formulele (d) și (e) se obțin ecuațiile parametrice ale Rostogolitoarei și Bazei , aceleași cu cele obținute prin metoda geometrică .

Vitezele punctelor B și A sunt:

$$\begin{aligned} v_B &= \omega \cdot IB = v_0 \sin \varphi \\ v_A &= \omega \cdot IA = \frac{v_0}{2R} \cdot \sqrt{\ell^2 + (2R)^2 - 4lR \cos \varphi} \end{aligned} \quad (j)$$

**10.7. Se consideră o bară OA de lungime  $\ell$  se deplasează într-un plan vertical cu extremitatea O pe direcție orizontală, rezemându-se tot timpul în B pe semicercul de rază R (fig. 10.7.a). Se cunosc viteza de deplasare a punctului O ,  $v_0 = \text{constant}$ . Se cer: Ecuația Bazei și Rostogolitoarei și vitezele punctelor A și B ale barei.**

**Rezolvare :**

**a. Metoda geometrică**

Din considerații geometrice și trigonometrice (fig.10.7.a), avem următoarele ecuații parametrice ale Bazei:

$$\begin{cases} \xi_1 = O_1O = \frac{R}{\cos \varphi}; \\ \eta_1 = O_1O \cdot \text{tg} \varphi = R \frac{\sin \varphi}{\cos^2 \varphi} \end{cases} \quad (a)$$

Eliminând parametrul  $\varphi$  din relațiile (a) se obține ecuația Bazei:

$$\xi^4 - R^2(\xi^2 + \eta^2) = 0 \quad (b)$$

Pentru Rostogolitoare (fig.CR2.4.2), obținem :

$$\begin{cases} \xi = OD = \eta_1 \sin \varphi = R \operatorname{tg}^2 \varphi \\ \eta = ID = \eta_1 \cos \varphi = R \operatorname{tg} \varphi \end{cases} \quad (c)$$

Eliminând parametrul  $\varphi$  din relațiile (a) se obține ecuația Bazei:

$$\eta^2 = R\xi \quad (d)$$

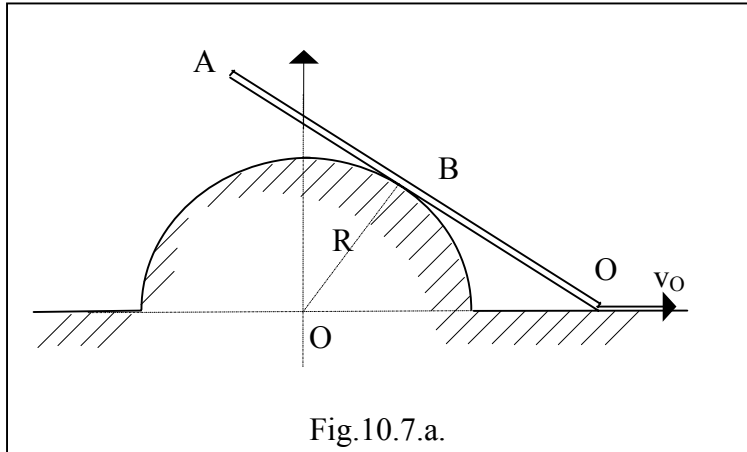


Fig.10.7.a.

**b. Metoda grafo-analitică**

Același rezultat se obține folosind ecuațiile parametrice teoretice ale Rostogolitoarei:

$$\xi = -\frac{v_{0y}}{\omega}; \quad \eta = \frac{v_{0x}}{\omega} \quad (e)$$

și ecuațiile parametrice ale Bazei

$$\begin{cases} \xi_1 = x_0 + \xi \cos \varphi - \eta \sin \varphi \\ \eta_1 = y_0 + \xi \sin \varphi + \eta \cos \varphi \end{cases} \quad (f)$$

în care dacă se înlocuiesc valorile pentru:

$$\begin{cases} v_{0x} = v_0 \cos \varphi \\ v_{0y} = -v_0 \sin \varphi \end{cases} \quad (g)$$

$$\begin{cases} x_0 = O_1O = \frac{R}{\cos \varphi} \\ y_0 = 0 \end{cases}$$

se obține:

$$\omega = \frac{v_0}{IO} = \frac{v_0 \cos^2 \varphi}{R \sin \varphi}, \quad (h)$$

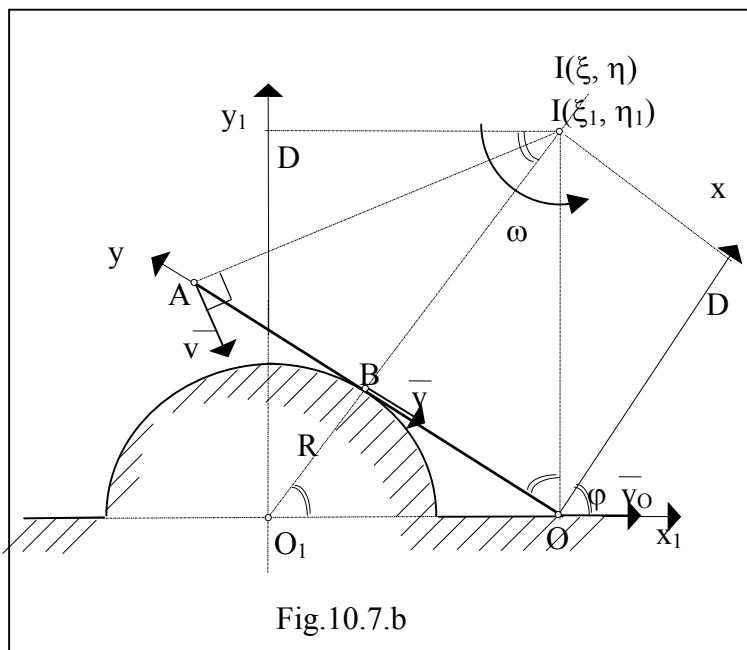


Fig.10.7.b

Vitezele pentru cele două puncte se determină astfel:

$$v_B = \omega \cdot IB = \omega \cdot \xi = v_0 \cos \varphi$$

$$v_A = \omega \cdot IA = \frac{v_0 \cos^2 \varphi}{R \sin \varphi} \sqrt{\ell^2 + R^2 \frac{\sin^2 \varphi}{\cos^4 \varphi} - 2IR \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi}} \quad (i)$$

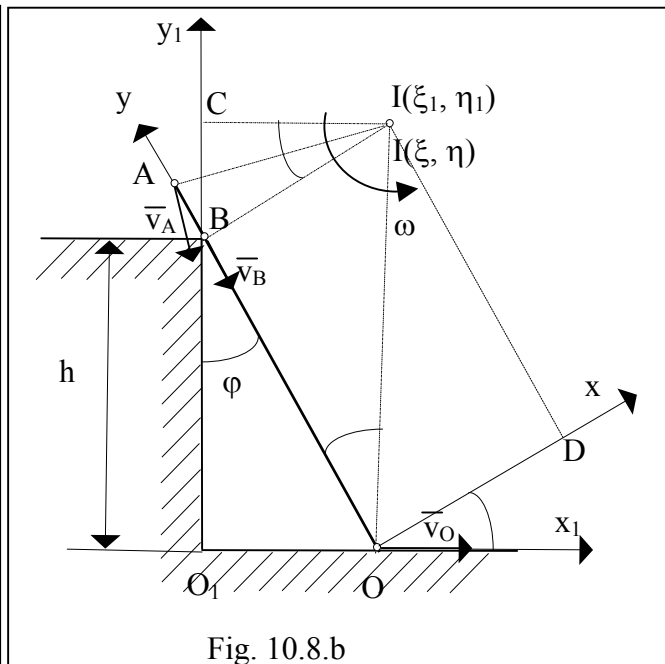
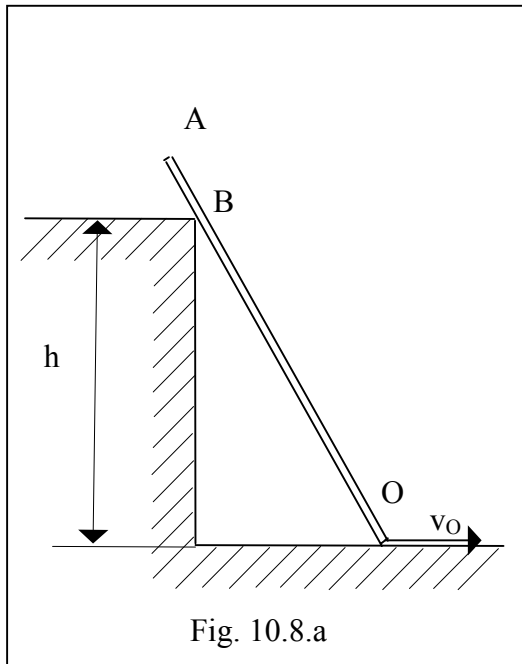
**10.8. Se consideră o bară OA de lungime  $\ell$  care se deplasează într-un plan vertical cu extremitatea O pe direcție orizontală, rezemându-se tot timpul în B pe o muchie situată la înălțimea  $h$  (fig. 10.8.a). Se cunosc viteza de deplasare a punctului O ,  $v_0 = \text{constant}$ . Se cer: Baza și Rostogolitoarea mișcării, precum și vitezele punctelor A și B ale barei.**

**Rezolvare:**

**a. Metoda geometrică**

Intersecția perpendicularelor duse în O și B pe  $\vec{v}_0$  și  $\vec{v}_B$  determină C.I.R, punctul de viteză nulă I. Se notează  $\varphi = \varphi(t)$  unghiul dintre axele  $O_1x_1$  (fixă) și  $Ox$  (mobilă). Din considerații geometrice (fig. 10.8.b) se poate scrie relațiile :

$$\begin{cases} \xi_1 = O_1O = h \cdot \text{tg}\varphi \\ \eta_1 - h = \xi_1 \cdot \text{tg}\varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \xi_1 = h \cdot \text{tg}\varphi \\ \eta_1 = \frac{h}{\cos^2 \varphi} = h \cdot (1 + \text{tg}^2 \varphi) \end{cases} \quad (a)$$



Eliminând parametrul  $\varphi$  din relațiile (a) se obține ecuația Bazei :

$$\xi_1^2 - \eta_1 h + h^2 = 0. \quad (b)$$

Ecuația (b) se poate obține direct din asemănarea triunghiurilor dreptunghice  $OO_1B$  și  $BO_1I$ :

$$\frac{OO_1}{O_1B} = \frac{BC}{CI} \Rightarrow \frac{\xi_1}{h} = \frac{\eta_1 - h}{\xi_1} \quad (c)$$

Pentru Rostogolitoare avem din fig. 10.8.b :

$$\begin{cases} \eta = ID = \eta_1 \cos \varphi = \frac{h}{\cos \varphi}; & \xi = \eta_1 \sin \varphi = \frac{h \sin \varphi}{\cos^2 \varphi} \end{cases} \quad (d)$$

Eliminând parametrul  $\varphi$  din relațiile (d) se obține ecuația Rostogolitoarei:

$$\eta^4 - h^2(\eta^2 + \xi^2) = 0 \quad (e)$$

**b. Metoda grafo-analitică**

Același rezultat se obține folosind ecuațiile parametrice ale Rostogolitoarei:

$$\xi = -\frac{v_{0y}}{\omega}, \quad \eta = \frac{v_{0x}}{\omega} \quad (f)$$

și ale ecuațiile parametrice ale Bazei

$$\begin{aligned} \xi_1 &= x_0 + \xi \cos \varphi - \eta \sin \varphi \\ \eta_1 &= y_0 + \xi \sin \varphi + \eta \cos \varphi \end{aligned} \quad (g)$$

în care:

$$\begin{cases} v_{0x} = v_0 \cos \varphi & \begin{cases} x_0 = O_1O = h \cdot \operatorname{tg} \varphi \\ y_0 = 0 \end{cases} \\ v_{0y} = -v_0 \sin \varphi \end{cases} \quad (h)$$

$$\Rightarrow \dot{x}_0 = \frac{h\dot{\varphi}}{\cos^2 \varphi} = v_0 \text{ sau } \dot{\varphi} = \omega = \frac{v_0 \cos^2 \varphi}{h}$$

Vitezele punctelor A și B se obțin astfel:

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{v_0}{IO} = \frac{v_0}{\eta_1} = \frac{v_0}{h} \cos^2 \varphi; \\ v_B &= \omega \cdot IB = \omega \cdot \xi = v_0 \sin \varphi \\ v_A &= \omega \cdot IA = \omega \sqrt{OA^2 + IO^2 - 2OA \cdot IO \cos \varphi} = \omega \sqrt{\ell^2 + \eta_1^2 - 2\ell\eta_1 \cos \varphi} \\ v_A &= \frac{v_0}{h} \cos^2 \varphi \sqrt{\ell^2 + \frac{h^2}{\cos^4 \varphi} - 2\ell h \frac{1}{\cos \varphi}} \end{aligned} \quad (i)$$

**10.9. Se consideră o bară OA de lungime  $\ell$  se deplasează într-un plan vertical cu extremitatea O pe direcția orizontală, rezemându-se tot timpul în B pe cercul fix de rază R (fig. 10.9.a), iar extremitatea A se deplasează cu viteză constantă  $v_0 = \text{constant}$ . Se cer: Ecuația Bazei și Rostogolitoarei mișcării, vitezele punctelor A și B ale barei.**

**Rezolvare :**

**a. Metoda geometrică**

Din considerații geometrice și trigonometrice (fig.10.9.b) ( $\varphi=90^\circ-2\alpha$ ) avem următoarele ecuații parametrice ale Bazei :

$$\begin{cases} \xi_1 = O_1O = R \cdot ctg\alpha \\ \eta_1 = OI = \frac{BO}{\cos\varphi} = \frac{R \cdot ctg\alpha}{\cos(\pi/2 - 2\alpha)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \xi_1 = \frac{R \cos\alpha}{\sin\alpha} \\ \eta_1 = \frac{R}{2\sin^2\alpha} \end{cases} \quad (a)$$

Eliminând parametrul  $\alpha$  se obține ecuația Bazei sub forma implicită:

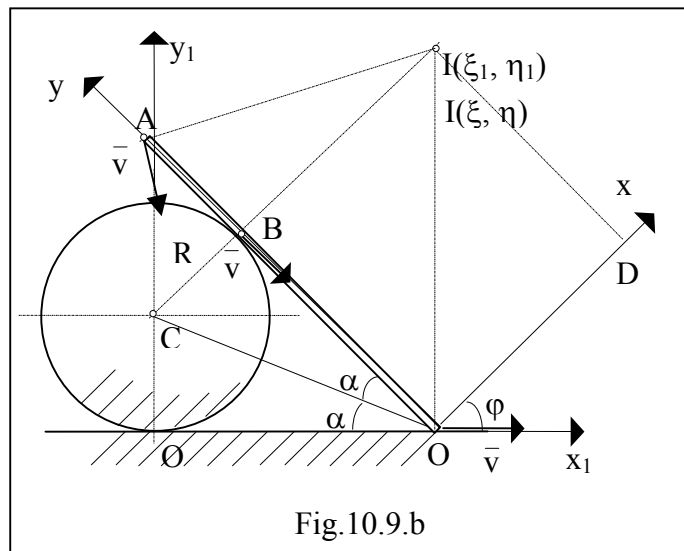
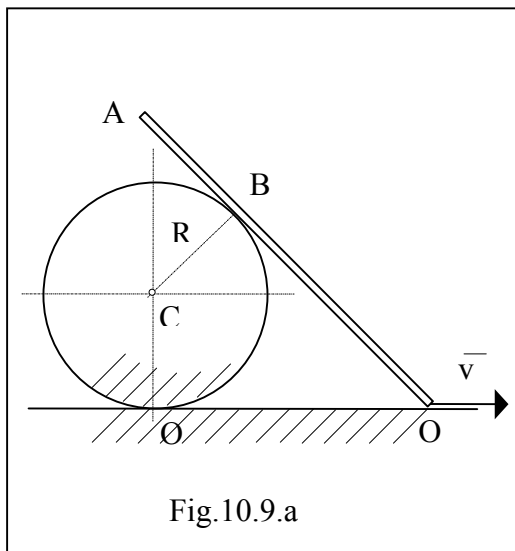
$$\xi_1^2 - 2R\eta_1 + R^2 = 0 \quad (b)$$

Pentru Rostogolitoare (fig. 10.9.b) obținem în mod analog :

$$\begin{cases} \xi = OD = \eta_1 \sin\varphi = \frac{R \cos 2\alpha}{2\sin^2\alpha} \\ \eta = ID = \eta_1 \cos\varphi = \frac{R \cos\alpha}{\sin\alpha} \end{cases} \quad (c)$$

Eliminând parametrul  $\alpha$  se obține ecuația Rostogolitoarei sub forma implicită:

$$\eta^2 - 2R\xi - R^2 = 0 \quad (d)$$



**b. Metoda grafo-analitică**

Același rezultat se obține folosind ecuațiile parametrice ale Rostogolitoarei:

$$\left\{ \begin{aligned} \xi &= -\frac{v_{0y}}{\omega}; & \eta &= \frac{v_{0x}}{\omega} \end{aligned} \right. \quad (f)$$

și ale ecuațiile parametrice ale Bazei:

$$\begin{cases} \xi_1 = x_0 + \xi \cos\varphi - \eta \sin\varphi \\ \eta_1 = y_0 + \xi \sin\varphi + \eta \cos\varphi \end{cases} \quad (g)$$

în care:

$$\begin{cases} v_{0x} = v_0 \cos\varphi = v_0 \sin 2\alpha \\ v_{0y} = -v_0 \sin\varphi = -v_0 \cos 2\alpha \end{cases} \quad \begin{cases} x_0 = O_1O = R \cdot ctg\alpha = R \cdot ctg\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) \\ y_0 = 0 \end{cases} \quad (h)$$

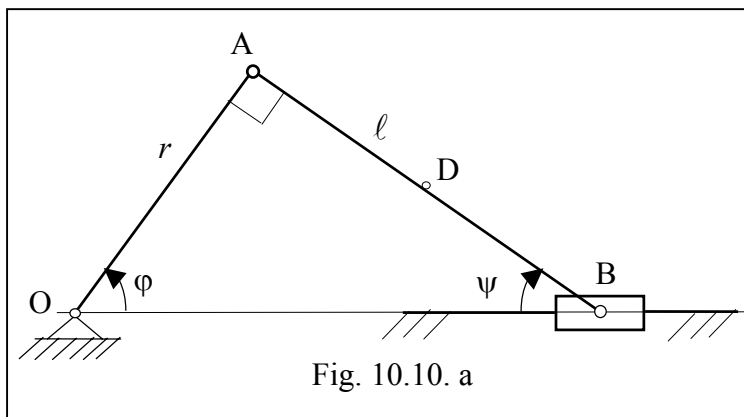
Derivând expresiile (g) se obține:

$$\dot{x}_0 = \frac{R\dot{\varphi}}{2\sin^2\alpha} = v_0 \text{ sau } \dot{\varphi} = \omega = \frac{2v_0\sin^2\alpha}{R} \quad (i)$$

Vitezele punctelor A și B se obțin astfel:

$$v_B = \omega \cdot IB = \omega \cdot \xi = v_0 \cos 2\alpha$$

$$v_A = \omega \cdot IA = \frac{2v_0\sin^2\varphi}{R} \sqrt{\ell^2 + \frac{R^2}{4\sin^4\varphi}} - 2lR \cdot \text{ctg}\alpha \quad (j)$$



**10.10.** Se consideră mecanismul bielă-manivelă din figura 10.10.a, pentru care se cunosc:  $OA=r=2$ ,  $AB=l=2\sqrt{3}$  (m) și legea de mișcare a manivelei OA:  $\varphi(t)=3t$  (rad). Se cere viteza culisei B la momentul  $t_1$  pentru care unghiul  $OAB=90^\circ$ , viteza punctului D al bielei aflat la mijlocul disanței AB, poziția centrului instantaneu de rotație și viteza unghiulară a bielei la același moment  $t_1$ .

**Rezolvare :**

Se notează cu  $\psi$  unghiul OBA (fig. 10.10.b).

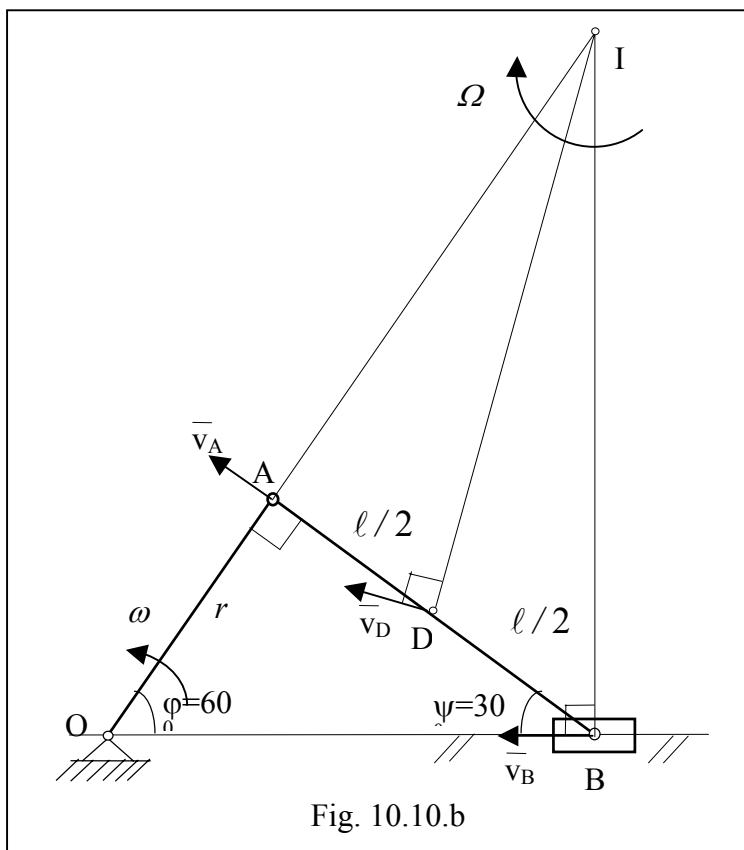
Viteza unghiulară a manivelei OA este:  $\omega = \dot{\varphi} = 3$  (rad / s)

Viteza punctului A va fi :

$$v_A = OA \cdot \omega = r\omega = 6 \text{ (m / s)}$$

Conform datelor problemei se obține:

$$OB = \sqrt{OA^2 + AB^2} = 4 \text{ (m)}$$



Deci rezultă pentru poziția dată avem valorile:  $\psi=30^\circ$ ,  $\varphi=60^\circ$ .

Cunoscând direcțiile și sensurile vitezelor punctelor A și B, intersecția perpendiculararelor duse pe aceste direcții, este centrul instantaneu de rotație

Conform fig. 10.10.b, din triunghiul AIB rezultă:

$$AI = AB \operatorname{tg} \varphi = 6 \text{ (m)};$$

$$BI = AB / \cos \varphi = 4\sqrt{3} \text{ (m)}$$

Viteza unghiulară  $\Omega$  a bielei AB, aflată în mișcare plan paralelă se determină din relația:  $v_A = AI \cdot \Omega$ , de unde rezultă viteza unghiulară cerută:

$$\Omega = \frac{v_A}{AI} = 1 \text{ (rad / s)}$$

Viteza culisei B a mecanismului se determină cu ajutorul relației:

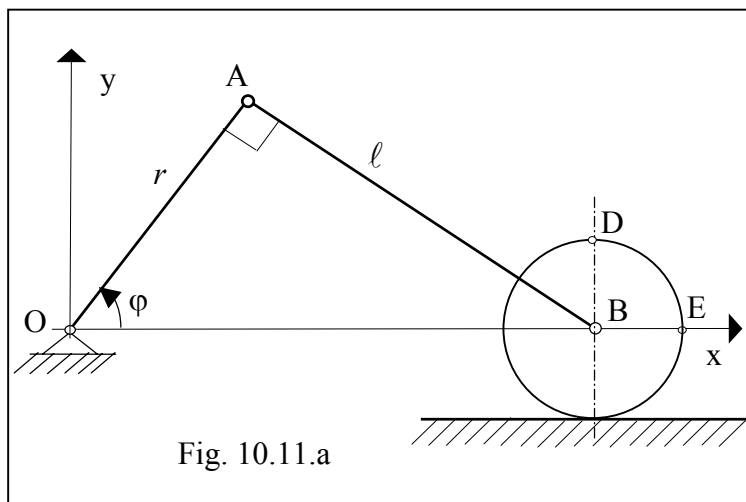
$$v_B = BI \cdot \Omega = 4\sqrt{3} = 6,92 \text{ (m / s)}$$

Viteza punctului D al bielei este perpendiculară pe ID și se determină cu ajutorul relației:

$$v_D = DI \cdot \Omega = \sqrt{AI^2 + AD^2} \cdot \Omega = \sqrt{39} = 6,24 \text{ (m / s)}$$

**10.11. Se consideră mecanismul bielă-manivelă din figura 10.11.a, care antrenează un disc de rază R, ce se rostogolește fără alunecare dealungul unei suprafețe paralele cu OB; se cunosc:  $OA = r = 10$ ;  $AB = \ell = 50$ ;  $R = 12$  (cm) și legea de mișcare a manivelei OA:  $\varphi(t) = \pi t$  (rad). Pentru două poziții ale mecanismului corespunzătoare unghiurilor  $\varphi_1 = 0$  respectiv  $\varphi_2 = 90^\circ$ , se cere:**

1. viteza și accelerația unghiulară a roții de rază R;
2. viteza și accelerația punctelor D și E ale roții;
3. poziția centrului instantaneu de rotație și a polului accelerațiilor roții.



**Rezolvare :**

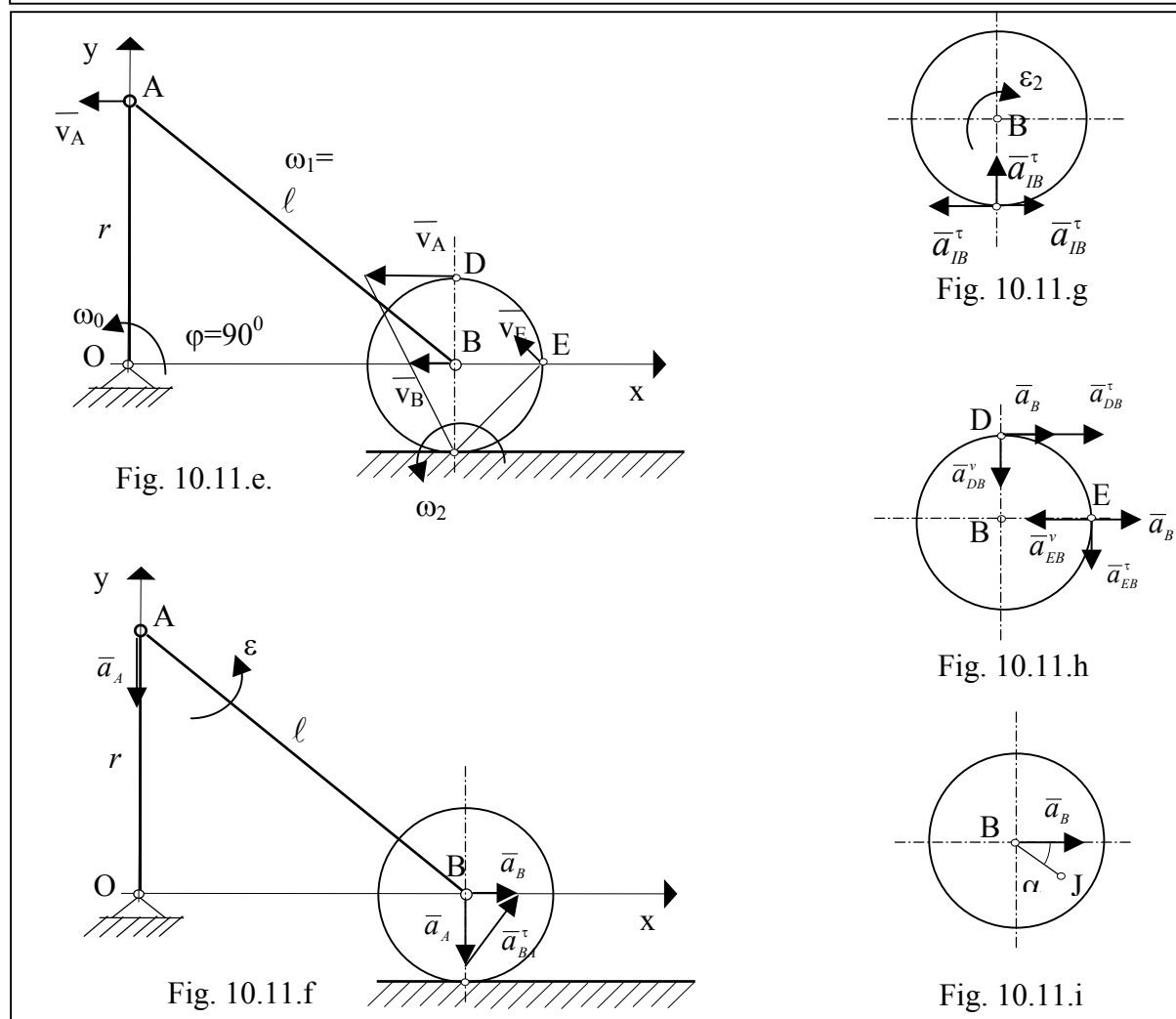
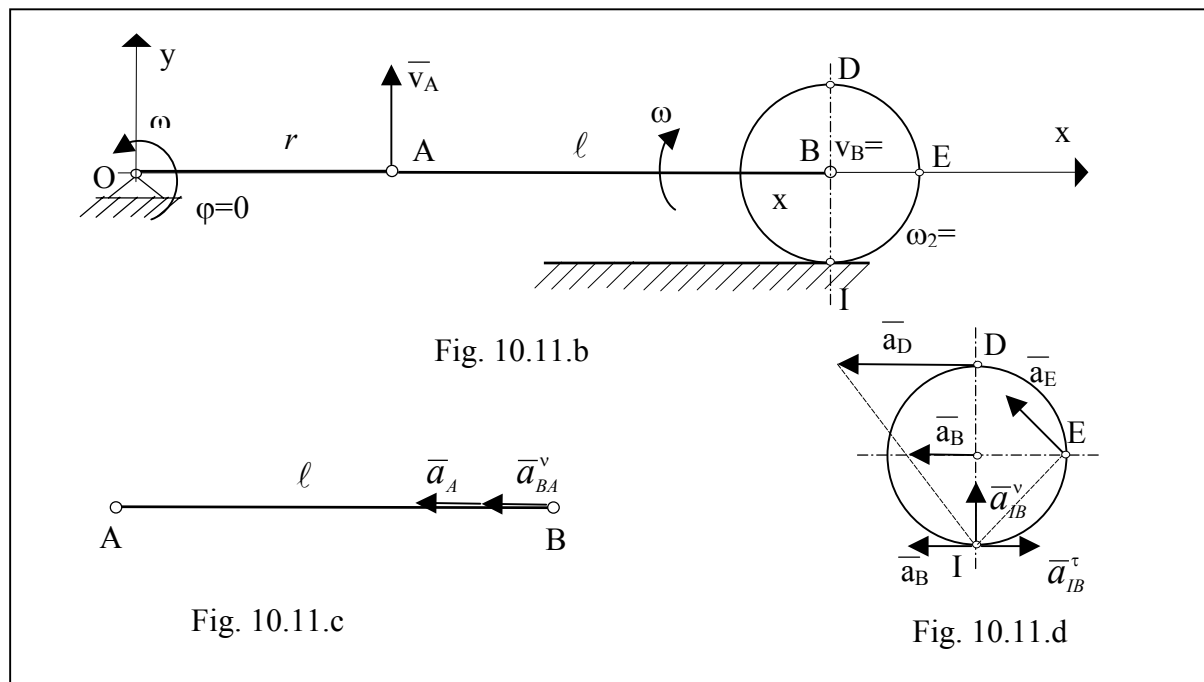
Cazul  $\varphi_1 = 0$ . Pentru prima poziție a mecanismului dat corespunzătoare unghiului  $\varphi_1$  a se vedea fig. 10.11.b, c, d:

Viteza unghiulară a manivelei OA este:

$$\omega_0 = \dot{\varphi} = \pi \text{ (rad / s)} \quad (a)$$

Viteza punctului A va fi:

$$v_A = OA \cdot \omega = 10\pi \text{ cm / s} \quad (b)$$



Pentru a detremina viteza unghiulară  $\omega_1$  a bielei AB se pleacă de la relația evidentă:  $v_A = AB \cdot \omega_1$ , de unde rezultă:

$$\omega_1 = \frac{v_A}{AB} = \frac{\pi}{5} \text{ (rad / s)} \tag{c}$$



Accelerația punctului A este:

$$a_A = a_a^v = OA \cdot \omega^2 = 10\pi^2 \text{ cm/s}^2 \quad (d)$$

Între accelerațiile punctelor A și B există relația vectorială (vezi fig. 10.11.c):

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA}^v + \bar{a}_{BA}^\tau \quad (e)$$

unde:  $|\bar{a}_{BA}^v| = BA \cdot \omega_1^2 = 2\pi^2 \text{ cm/s}^2 \quad (f)$

$\bar{a}_{BA}^\tau$  este cunoscută doar ca direcție ( $\perp \overline{BA}$ ), fiind necunoscută ca mărime

Dacă se proiectează relația (e) pe axa Oy rezultă  $a_{BA}^\tau = 0$ , prin urmare  $\varepsilon_1 = 0$

Proiectând relația (e) pe axa Ox rezultă:

$$a_B = -a_A - a_{BA}^v = -12\pi^2 \text{ cm/s}^2 \quad (g)$$

Accelerația punctului I aparținând roții se poate exprima prin relația vectorială (vezi fig. 10.11.c):

$$\bar{a}_I = \bar{a}_B + \bar{a}_{IB}^v + \bar{a}_{IB}^\tau \quad (h)$$

Proiectând relația (h) pe axa Ox rezultă:

$$0 = a_B - a_{IB}^\tau \Rightarrow 12\pi^2 = \varepsilon_2 \cdot BI \Rightarrow \varepsilon_2 = \pi^2 \text{ rad/s}^2 \quad (i)$$

Dacă se proiectează relația (h) pe axa Oy rezultă:

$$a_I = a_{IB}^v = BI \cdot \omega_2^2 = 0 \quad (j)$$

Rezultă că centrul instantaneu de rotație și polul accelerațiilor se află în punctul I.

Accelerațiile punctelor D și E aparținând roții se determină cu ajutorul relațiilor vectoriale (vezi fig. 10.11.d):

$$\bar{a}_D = \bar{\varepsilon}_2 \times \overline{ID}, \text{ respectiv: } \bar{a}_E = \bar{\varepsilon}_2 \times \overline{IE}.$$

Mărimile acestor accelerații sunt:

$$|\bar{a}_D| = \varepsilon_2 \cdot R\sqrt{2} = 12\sqrt{2}\pi^2 \text{ cm/s}^2; \quad |\bar{a}_E| = \varepsilon_2 \cdot 2R = 24\pi^2 \text{ cm/s}^2 \quad (k)$$

Distribuția accelerațiilor este reprezentată în fig. 10.11.d

2. Pentru cazul  $\varphi_2 = \frac{\pi}{2}$ , a se vedea fig. 10.11.e ... i.

Viteza punctului A va fi:  $v_A = OA \cdot \omega = 10\pi \text{ cm/s}$

Vitezele punctelor A și B sunt paralele, deci  $\bar{v}_A = \bar{v}_B$ , prin urmare viteza unghiulară a bielei va fi  $\omega_1 = 0$ .

Centrul instantaneu de rotație fiind în punctul I, putem scrie:  $v_B = IB \cdot \omega_2$

de unde rezultă viteza unghiulară a roții:  $\omega_2 = \frac{v_B}{IB} = \frac{5\pi}{6} \text{ (rad/s)}. \quad (l)$

Vitezele punctelor D și E aparținând roții se determină cu ajutorul relațiilor vectoriale:  $\vec{v}_D = \vec{\omega}_2 \times \overline{ID}$ , respectiv:  $\vec{v}_E = \vec{\omega}_2 \times \overline{IE}$ .

Mărimile acestor viteze sunt:

$$|\vec{v}_D| = \omega_2 \cdot 2R = 20\pi \text{ cm/s}; \quad |\vec{v}_E| = \omega_2 \cdot \sqrt{2}R = 10\sqrt{2}\pi \text{ cm/s} \quad (\text{m})$$

Accelerația punctului A este orientată de la A spre O (vezi fig. 10.11.f):

$$a_A = a_a^v = OA \cdot \omega^2 = 10\pi^2 \text{ cm/s}^2 \quad (\text{n})$$

Accelerația punctului B se determină cu ajutorul relației vectoriale (vezi fig. 10.11.c):

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}^v + \vec{a}_{BA}^t \quad (\text{o})$$

unde deoarece  $\omega_1=0$ , rezultă:  $|\vec{a}_{BA}^v| = BA \cdot \omega_1^2 = 0$

Notând cu  $\gamma$  unghiul dintre  $\vec{a}_A$  și  $\vec{a}_{BA}^t$ , este valabilă relația:

$$\text{tg}\gamma = \frac{OA}{OB} = 0,204 \quad (\text{p})$$

Dacă se proiectează relația (o) pe axele Ox și Oy rezultă:

$$\begin{cases} a_B = a_{BA}^t \sin \gamma \\ 0 = a_{BA}^t \cos \gamma - a_A \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_B = a_A \text{tg}\gamma = 2,04\pi^2 \text{ cm/s}^2 \\ a_{BA}^t = \sqrt{a_A^2 + a_B^2} = 10,2\pi^2 \text{ cm/s}^2 \end{cases} \quad (\text{q})$$

Accelerația unghiulară a bielei AB se detremină cu ajutorul relației:

$$\varepsilon_1 = \frac{a_{BA}^t}{AB} = 0,204\pi^2 \text{ (rad/s}^2\text{)} \quad (\text{r})$$

Distribuția accelerațiilor este reprezentată în fig. 10.11.g

$$\vec{a}_I = \vec{a}_B + \vec{a}_{IB}^v + \vec{a}_{IB}^t \quad (\text{s})$$

Dacă se proiectează relația (s) pe axele Ox și Oy rezultă:

$$|\vec{a}_B| = |\vec{a}_{IB}^t| = 2,04\pi^2 \text{ cm/s}^2 \quad (\text{t})$$

$$|\vec{a}_I| = |\vec{a}_{IB}^v| = R\omega_2^2 = 8,33\pi^2 \text{ cm/s}^2$$

Accelerația unghiulară a roții se detremină cu ajutorul relației:

$$\varepsilon_2 = \frac{a_{IB}^v}{IB} = 0,17\pi^2 \text{ (rad/s}^2\text{)} \quad (\text{u})$$

Distribuția accelerațiilor punctelor D și E aparținând roții se determină cu ajutorul relațiilor vectoriale (vezi fig. 10.11.h):

$$\vec{a}_D = \vec{a}_B + \vec{a}_{DB}^v + \vec{a}_{DB}^t \quad (\text{v})$$

$$\vec{a}_E = \vec{a}_B + \vec{a}_{EB}^v + \vec{a}_{EB}^t$$

Având în vedere orientările acestor accelerații mărimile accelerațiilor punctelor D și E sunt:

$$|\bar{a}_D| = \sqrt{(a_B + a_{DB}^\tau)^2 + (a_{DB}^v)^2} = 9,25\pi^2 \text{ cm/s}^2; \tag{w}$$

$$|\bar{a}_E| = \sqrt{(-a_B + a_{EB}^v)^2 + (a_{EB}^\tau)^2} = 6,6\pi^2 \text{ cm/s}^2$$

Unghiurile  $\alpha_1$  și  $\alpha_2$  pe care le fac aceste accelerații cu direcția verticală se determină cu ajutorul relațiilor:

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{a_B + a_{DB}^\tau}{a_{DB}^v} = 0,49 \Rightarrow \alpha_1 = 26,105^\circ \tag{x}$$

$$\operatorname{tg}\alpha_2 = \frac{a_{EB}^\tau}{a_{EB}^v - a_B} = 0,325 \Rightarrow \alpha_2 = 18,004^\circ$$

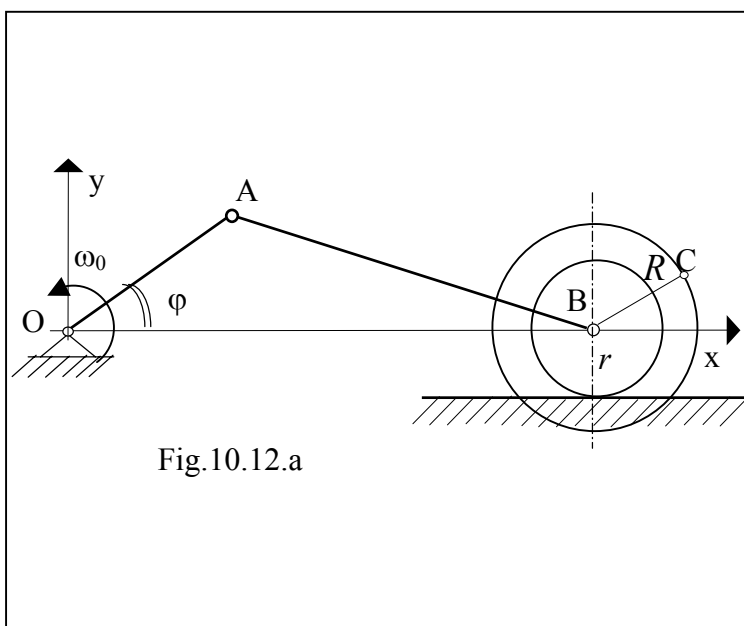
Distanța BJ dintre punctul B și polul accelerațiilor (vezi fig. 10.11.i) este dată de :

$$BJ = \frac{a_B}{\sqrt{\varepsilon_2^2 + \omega^4}} = 2,86 \text{ cm} \tag{y}$$

iar unghiul  $\alpha$  dintre BJ și  $\bar{a}_B$  este  $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\varepsilon_2}{\omega_2^2} = 0,2444 \Rightarrow \alpha = 13,734^\circ$  (z)

**10.12. Se consideră mecanismul bielă-manivelă din figura 10.12.a, care antrenează un disc de rază R ce se rostogolește fără alunecare pe crecul de rază r dealungul unei suprafețe paralele cu OB; se cunosc: legea de mișcare a manivelei OA:  $\varphi(t) = 2t$  (rad), OA = 40; AB = 80; BC = 25; r = 15 (cm).**

**Se cer vitezele punctelor A, B, C ale roții precum și vitezele unghiulare ale elementelor mecanismului pentru poziția particulară dată de  $\varphi = 30^\circ$ .**



**Rezolvare :**

Se observă că (fig. 10.12.a) elementele mecanismului au următoarele mișcări: rotație-manivela OA, plan-paralelă-bielă AB și roata de rază R. Centrele instantanee de rotație ale bielei și roții se determină ridicând perpendiculare pe suporturile vitezelor  $v_A$  respectiv  $v_B$  (fig. 10.12.b).

Viteza unghiulară a bielei AB este:

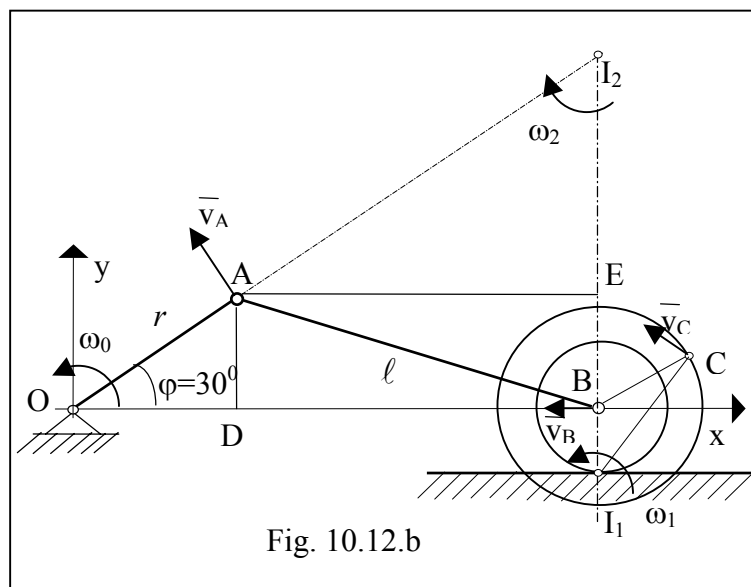


Fig. 10.12.b

$$\omega_2 = \frac{v_A}{I_2A} \quad (a)$$

unde  $I_2A$  se determină din triunghiul  $AEI_2$ :

$$I_2A = \frac{AE}{\cos\varphi} = \frac{\sqrt{AB^2 - (OA\sin\varphi)^2}}{\cos\varphi}$$

$$I_2A = 89,6 \text{ cm} \quad (b)$$

Rezultă:

$$\omega_2 = \frac{v_A}{I_2A} = 0,839 \text{ rad/s} \quad (c)$$

Viteza punctului B se determină astfel:

$$v_B = \omega_2 \cdot I_2B, \quad \text{unde } I_2B = (OA + I_2A)\sin 30^\circ = 64,8 \text{ cm}$$

$$\text{Rezultă } v_B = \omega_2 \cdot I_2B = 57,9 \text{ cm/s}$$

Centrul instantaneu de rotație al roții se află în  $I_1$ , iar viteza unghiulară se calculează în raport cu acesta cu ajutorul relației:  $\omega_1 = \frac{v_B}{I_1B} = 3,86 \text{ rad/s}$

$$\text{Viteza punctului C se determină astfel: } v_C = \omega_1 \cdot I_1C$$

$$\text{unde: } I_1C = \sqrt{I_1B^2 + BC^2 - 2 \cdot I_1B \cdot BC \cos 120^\circ} = 35 \text{ cm}$$

$$\text{Rezultă } v_C = \omega_1 \cdot I_1C = 135 \text{ cm/s}$$

**10.13. Se consideră un sistem de trei corpuri (1), (2) și (3) legate între ele prin fire flexibile și inextensibile, executând respectiv mișcări de tranlație, rotație și plan-paralelă (fig.10.13.a). Se cunosc razele discurilor  $R_2=2a$ ,  $r_2=a$ ,  $R_3=2a$ , iar discul 3 se rostogolește fără să alunece. Se cere să se exprime vitezele corpurilor 2 și 3 în funcție de viteza corpului 1 (sau analiza cinematică a sistemului de corpuri).**

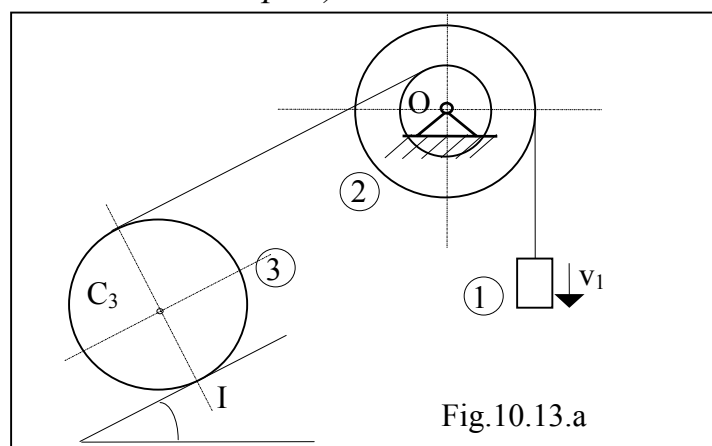


Fig.10.13.a

**Rezolvare:**

Distribuțiile de viteze sunt conform fig.10.13.b și se pot scrie relațiile:

**Pentru corpul 1 :**

Viteza este:  $v_1$

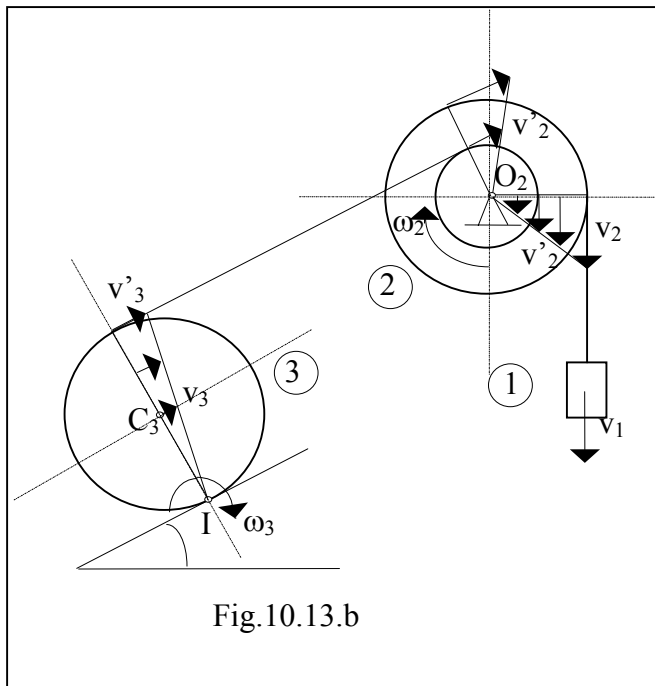


Fig.10.13.b

**Pentru corpul 2 :**

$$\left. \begin{aligned} \omega_2 &= \frac{v_2}{R_2} = \frac{v'_2}{r_2} \\ v_2 &= v_1 \\ r_2 &= a \\ R_2 &= 2a \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} \omega_2 = \frac{v_1}{2a} \\ v'_2 = \frac{v_1}{2} \end{cases} \quad (a)$$

**Pentru corpul 3 :**

$$\left. \begin{aligned} \omega_3 &= \frac{v'_3}{2R_3} = \frac{v_3}{R_3} \\ v'_3 &= v'_2 = \frac{v_1}{2} \\ R_3 &= 2a \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} \omega_3 = \frac{v_1}{8a} \\ v_3 = \frac{v_1}{4} \end{cases} \quad (b)$$

**10.14.** *Se consideră un sistem de trei corpuri (1), (2) și (3) legate între ele prin fire flexibile și inextensibile, executând respectiv mișcări de tranlație, rotație și plan-paralelă (fig.10.14.a). Se cunosc razele discurilor  $R_2=2a$ ,  $r_2=a$ ,  $r_3=a$ ,  $R_3=2a$ , iar discul 3 se rostogolește fără să alunece .*

*Se cere să se exprime vitezele corpurilor 2 și 3 în funcție de viteza corpului 1 (sau analiza cinematică a sistemului de corpuri).*

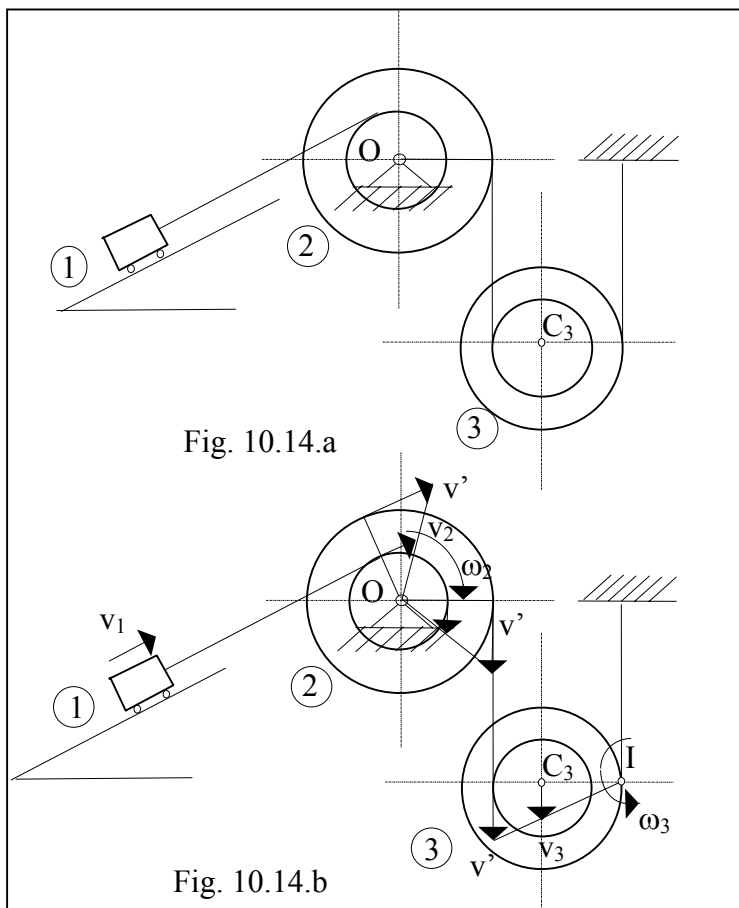


Fig. 10.14.a

Fig. 10.14.b

**Rezolvare:**

Distribuțiile de viteze sunt conform fig.CR2.4.10.b și se pot scrie relațiile:

**Pentru corpul 1 :**

Viteza este:  $v_1$

**Pentru corpul 2 :**

$$\left. \begin{aligned} \omega_2 &= \frac{v_2}{r_2} = \frac{v'_2}{R_2} \\ v_2 &= v_1 \\ r_2 &= a, R_2 = 2a \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \omega_2 = \frac{v_1}{a} \\ v'_2 = 2v_1 \end{cases}$$

**Pentru corpul 3:**

$$\left. \begin{aligned} \omega_3 &= \frac{v'_3}{R_3 + r_3} = \frac{v_3}{R_3} \\ v'_3 &= v'_2 = 2v_1 \\ r_3 &= a, R_3 = 2a \end{aligned} \right\} \Rightarrow \omega_3 = \frac{2v_1}{3a} = \frac{v_3}{2a} \Rightarrow \begin{cases} \omega_3 = \frac{2v_1}{3a} \\ v_3 = \frac{4v_1}{3} \end{cases} \quad (b)$$

**10.15. Se consideră mecanismul din figura 10.15 având elementele geometrice și mecanice următoare:**  $OA=2L, AB=4L, AC=L, (cm), \omega_{OA}=2\omega_0, s^{-1}, \epsilon_{OA}=\omega_0^2, s^{-2}$

**Se cer:** vitezele și accelerațiile următoare:  $v_A, a_A, v_B, a_B, \omega_{AB}, v_C, a_C, \epsilon_{AB}$ . pentru poziția mecanismului din fig. 10.15

**Rezolvare:**

Cele două bare ale mecanismului sunt: OA aflată în mișcare de rotație și AB în mișcare plan-paralelă. Centrul instantaneu de rotație al acesteia din urmă este I.

a) calculul vitezelor punctelor A, B, C : (a)

$$v_A = \omega_{OA} \cdot OA = 4L\omega_0 \text{ cm/s}$$

$$\omega_{AB} = \frac{v_A}{IA} = \frac{v_A}{2AB} = 4\omega_0 \text{ rad/s}$$

$$v_B = \omega_{AB} \cdot IB = \omega_{AB} \sqrt{IA^2 - AB^2} = 2\sqrt{3}L\omega_0 \text{ cm/s}$$

$$v_C = \omega_{AB} \cdot IC = \omega_{AB} \sqrt{IB^2 + CB^2} = \frac{\sqrt{57}}{2}L\omega_0 \text{ cm/s}$$

b) calculul accelerațiilor punctelor A, B, C:

$$\bar{a}_A = \bar{a}_A^\tau + \bar{a}_A^v \text{ unde } \begin{cases} a_A^\tau = \epsilon_{OA} \cdot OA = 2L\omega_0^2 \\ a_A^v = \omega_{OA}^2 \cdot OA = 8L\omega_0^2 \end{cases} \quad (b)$$

$$\Rightarrow a_A = \sqrt{(a_A^\tau)^2 + (a_A^v)^2} = 2\sqrt{17}L\omega_0^2 \text{ cm/s}^2$$

$$\text{tg}\beta = \frac{a_A^\tau}{a_A^v} = \frac{1}{4}$$

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{AB}^\tau + \bar{a}_{AB}^v$$

$$\text{unde } \begin{cases} a_{AB}^\tau = \epsilon_{AB} \cdot AB \\ a_{AB}^v = \omega_{AB}^2 \cdot AB \end{cases} \Rightarrow \epsilon_{AB} = \frac{a_{AB}^\tau}{AB} (2) \Rightarrow a_{AB}^v = L\omega_0^2$$

$$\bar{a}_{AB}^\tau \perp \overline{AB}, \quad \bar{a}_{AB}^v \parallel \overline{AB} \quad (\text{dela Aspre B})$$

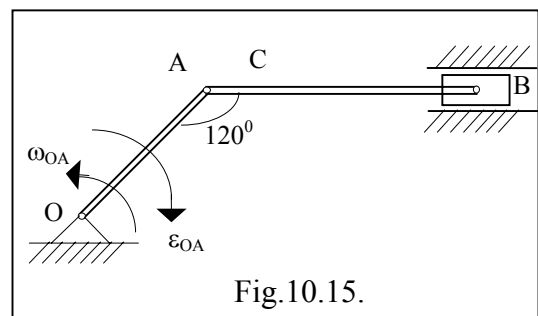


Fig.10.15.

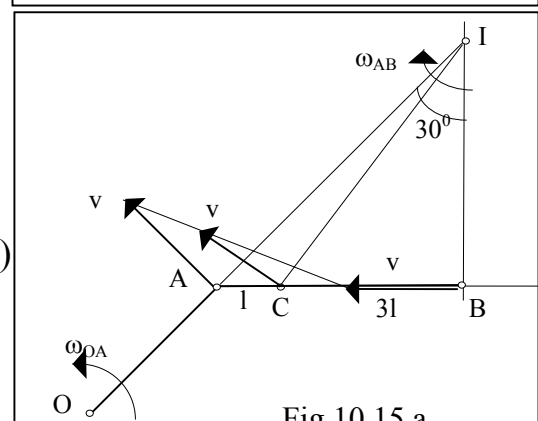


Fig.10.15.a.

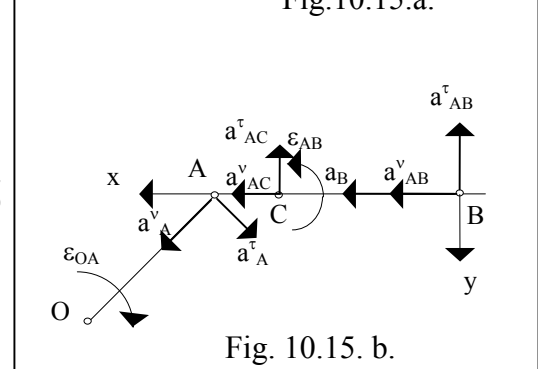


Fig. 10.15. b.

Relația (a) se mai scrie:  $\bar{a}_B = \bar{a}_A^\tau + \bar{a}_A^\nu + \bar{a}_{AB}^\tau + \bar{a}_{AB}^\nu$

care proiectată pe axele x și y conduce la:

$$\begin{cases} a_B = -a_A^\tau \cos 30^\circ + a_A^\nu \sin 30^\circ + a_{AB}^\nu \\ 0 = a_A^\tau \sin 30^\circ + a_A^\nu \cos 30^\circ - a_{AB}^\tau \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_B = (5 - \sqrt{3})L\omega_0^2 \\ a_{AB}^\tau = (1 + 4\sqrt{3})L\omega_0^2 \end{cases}$$

Întrucât  $a_{AB}^\tau$  în (b) se obține :  $\varepsilon_{AB} = \frac{1 + 4\sqrt{3}}{4}\omega_0^2$

Accelerația punctului C este:

$$\bar{a}_C = \bar{a}_A^\tau + \bar{a}_A^\nu + \bar{a}_{AC}^\tau + \bar{a}_{AC}^\nu \quad \text{unde} \quad \begin{cases} a_C = \varepsilon_{AC} \cdot AC = \frac{1 + 4\sqrt{3}}{4}L\omega_0^2 \\ a_C = \omega_{AB}^2 \cdot AC = \frac{1}{4}L\omega_0^2 \end{cases} \quad (c)$$

Proiectând relația (c) pe axele x și y avem :

$$a_{Cx} = -a \cos 30^\circ + a_A^\nu \sin 30^\circ + a_{AC}^\nu = \frac{17 - 4\sqrt{3}}{4}L\omega_0^2$$

$$a_{Cy} = a_A^\tau \sin 30^\circ + a_A^\nu \cos 30^\circ - a_{AC}^\tau = \frac{3}{4}(1 + 4\sqrt{3})L\omega_0^2$$

de unde se găsește prin înlocuire, accelerația punctului C:

$$a_C = \sqrt{a_{Cx}^2 + a_{Cy}^2} \quad (d)$$

**10.16. Se consideră mecanismul din figura 10.16 având elementele geometrice și mecanice următoare:  $OA=2L$ ,  $AB=6L$ ,  $AC=3L(cm)$ ;  $\omega_{OA}=2\omega_0 s^{-1}$ ,  $\varepsilon_{OA}=\omega_0^2 s^{-2}$**

**Se cer:** vitezele și accelerațiile următoare:  $v_A, a_A, v_B, a_B, \omega_{AB}, v_C, a_C, \varepsilon_{AB}$ , pentru poziția mecanismului din fig. 10.16.

**Rezolvare :**

- a) Pentru determinarea vitezelor se ține seama de faptul că bara OA este în mișcare de rotație , iar bara AB în mișcare plan-paralelă. Se determină centrul instantaneu de rotație și avem:

$$v_A = \omega_{OA} \cdot OA = 4L\omega_0$$

$$\omega_{AB} = \frac{v_A}{IA} = \frac{v_A}{\sqrt{AB^2 + IB^2}} = \frac{4L\omega_0}{6L\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{3}\omega_0 \text{ rad/s}$$

$$v_B = \omega_{AB} \cdot IB = \frac{\sqrt{2}}{3}\omega_0 \cdot 6L = 2\sqrt{2}L\omega_0 \text{ cm/s}$$

$$v_C = \omega_{AB} \cdot IC = \omega_{AB} \sqrt{BC^2 + IB^2} = \sqrt{10}L\omega_0$$

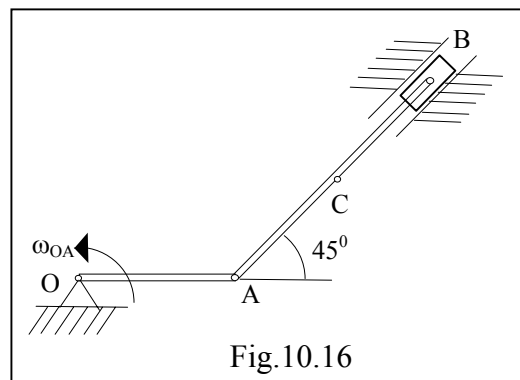


Fig.10.16





$$\begin{cases} a_{Cx} = a_A^\tau \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - a_A^v \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - a_{AC}^v \\ a_{Cy} = a_A^\tau \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + a_A^v \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - a_{AC}^\tau \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_{Cx} = -\frac{3\sqrt{2} + 2}{3} L\omega_0^2 \\ a_{Cy} = 5\left(\frac{2 - \sqrt{2}}{2}\right) L\omega_0^2 \end{cases} \quad (f)$$

Accelerația punctului C se calculează cu formula :  $a_c = \sqrt{a_{Cx}^2 + a_{Cy}^2}$

**10.17. Se consideră** mecanismul manivelă-balansier-piston din fig. 10.17, într-o poziție particulară ( $\varphi = 60^\circ$ ) în raport cu sistemul de referință Oxy. Lungimile elementelor (în mm) sunt:  $A_0A=R=30$ ,  $AC=L=130$ ,  $CD=r=25$ ,  $A_0B=d=80$ ,  $A_0D'=D=130$ . Manivela OA se rotește cu viteza unghiulară constantă:  $\omega_{10} = \omega_0 = 1 \text{ rad/s}$ , având sensul indicat în figură. **Se cere să se determine:**

$$v_{B_{23}}, v_{D_{50}}, a_{B_{23}}, a_{D_{50}}, \omega_{20}, \omega_{40}, \varepsilon_{20}, \varepsilon_{40}.$$

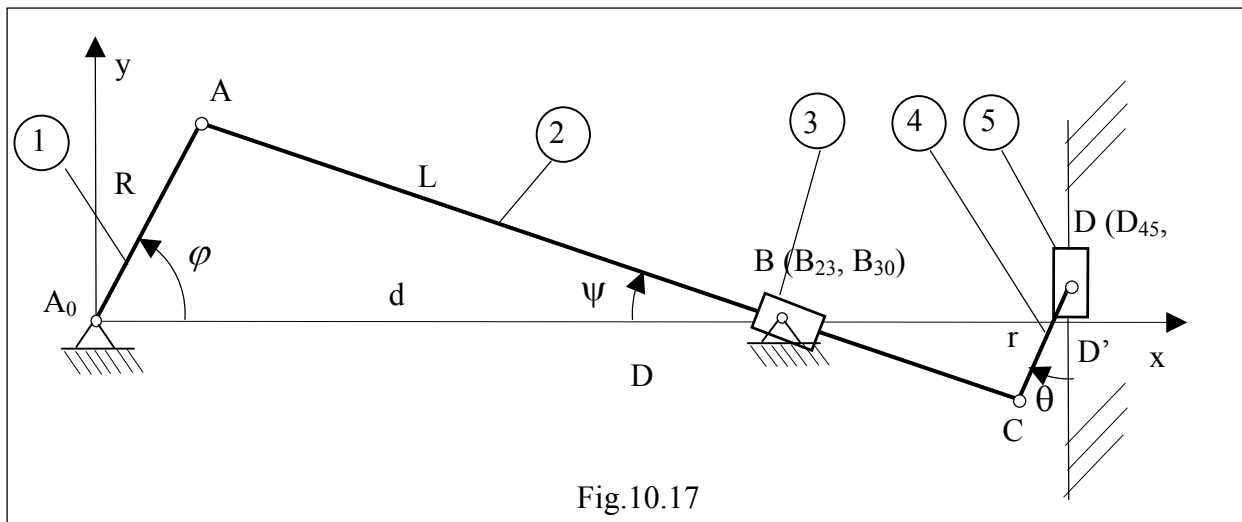


Fig.10.17

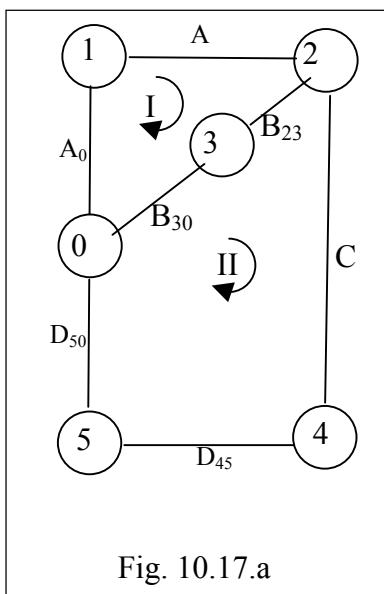


Fig. 10.17.a

**Rezolvare:**

Graful asociat acestui lanț cinematic *biciclu* este dat în fig. 10.17.a (cu cercuri s-au figurat elementele și cu linii cuplele cinematice). În punctele B și D se suprapun câte două cuple cinematice notate pe graful asociat cu: B ( $B_{23}, B_{30}$ ) respectiv D ( $D_{45}, D_{50}$ )

**1. Analiza pozițională a mecanismului**

Pentru *analiza pozițională* a elementelor și cuplelor acestui lanț cinematic (LC), se determină mai întâi unghiurile  $\psi$  și  $\theta$  în funcție de elementele cunoscute :  $R, L, r, d, D$  și  $\varphi$ .

Astfel dacă de scrie teorema sinusurilor în triunghiul  $A_0AB$  se obține unghiul  $\psi$ :

$$\frac{R}{\sin \psi} = \frac{d}{\sin(180 - \varphi - \psi)}, \text{ rezultă: } \operatorname{tg} \psi = \frac{R \cdot \sin \varphi}{d - R \cdot \cos \varphi} \quad (\text{a})$$

dacă de scriu proiecțiile laturilor  $A_0A$ ,  $AC$  și  $AD$  pe axa  $Ox$  se obține unghiul  $\theta$ :

$$R \cos \varphi + L \cos \psi + r \sin \theta = D, \text{ rezultă:}$$

$$\sin \theta = \frac{D - L \cos \psi - R \cos \varphi}{r} \quad (\text{b})$$

În tabelul de mai jos sunt date coordonatele  $x$  și  $y$  ale cuplelor cinematice:

<i>Cupla cinematică</i>	<b>A<sub>0</sub></b>	<b>A</b>	<b>B</b>	<b>C</b>	<b>D</b>
$x$	0	$R \cos \varphi$	$d$	$R \cos \varphi + L \cos \psi$	$D$
$y$	0	$R \sin \varphi$	0	$R \sin \varphi - L \sin \psi$	$R \sin \varphi - L \sin \psi + r \cos \theta$

## 2. Analiza cinematică a vitezelor

Ecuțiile de condiție pentru viteze sub forma generală se scriu:

$$\sum_{i=1}^n v_{Ai,i-1}^x - \sum_{i=1}^n \omega_{i,0} (y_B - y_A) = 0; \quad \sum_{i=1}^n v_{Ai,i-1}^y + \sum_{i=1}^n \omega_{i,0} (x_B - x_A) = 0 \quad (\text{c})$$

Pentru primul ciclu:  $0 - A_0 - 1 - A - 2 - B_{23} - 3 - B_{30} - 0$  ele se scriu astfel:

$$\begin{aligned} v_{B_{32}}^x - \omega_{10} (y_A - y_{A_0}) - \omega_{20} (y_B - y_A) &= 0; \\ v_{B_{32}}^y + \omega_{10} (x_A - x_{A_0}) + \omega_{20} (x_B - x_A) &= 0; \\ v_{B_{32}}^x &= v_{B_{32}} \cos(\pi - \psi); \quad v_{B_{32}}^y = v_{B_{32}} \sin(\pi - \psi) \end{aligned} \quad (\text{d})$$

Rezolvând sistemul se obține:

$$\omega_{20} = \omega_{10} \frac{-(y_B - y_A) \sin \psi + (x_B - x_A) \cos \psi}{(y_A - y_{A_0}) \sin \psi - (x_A - x_{A_0}) \cos \psi} \quad (\text{e})$$

$$v_{B_{32}} = \omega_{10} \frac{-(y_A - y_{A_0})(x_B - x_A) + (x_A - x_{A_0})(y_B - y_A)}{-(y_B - y_A) \sin \psi + (x_B - x_A) \cos \psi} \quad (\text{f})$$

Pentru al II-lea ciclu:  $0 - B_{03} - 3 - B_{32} - 2 - C - 4 - D_{45} - 5 - D_{50} - 0$  ecuațiile (c) se scriu astfel:

$$\begin{aligned} v_{B_{23}}^x + v_{D_{05}}^x - \omega_{20} (y_C - y_B) - \omega_{40} (y_D - y_C) &= 0; \\ v_{B_{23}}^y + v_{D_{05}}^y + \omega_{20} (x_C - x_B) - \omega_{40} (x_D - x_C) &= 0; \\ v_{B_{23}}^x &= v_{B_{23}} \cos(\pi - \psi); \quad v_{B_{23}}^y = v_{B_{23}} \sin(\pi - \psi); \quad v_{D_{05}}^x = 0; \quad v_{D_{05}}^y = v_{D_{05}} \end{aligned} \quad (\text{g})$$

Rezolvând sistemul se obține:

$$\omega_{40} = \omega_{20} \frac{(y_C - y_B)}{(y_D - y_C)} + v_{B32} \frac{\cos \psi}{(y_D - y_C)} \quad (\text{h})$$

$$v_{D50} = -v_{D05} = v_{B32} \sin \psi + \omega_{20}(x_C - x_B) + \omega_{40}(x_D - x_C) \quad (\text{i})$$

## 2. Analiza cinematică a accelerațiilor

Ecuțiile de condiție pentru viteze sub forma generală se scriu:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n a_{Ai,i-1}^{tx} - \sum_{i=1}^n \varepsilon_{i,0} (y_B - y_A) &= \sum_{i=1}^n \omega_{i,0}^2 (x_B - x_A) - \sum_{i=1}^n a_{Ai,i-1}^{nx} + 2 \sum_{i=1}^n \omega_{i,0} v_{Ai,i-1}^y \\ \sum_{i=1}^n a_{Ai,i-1}^{ty} + \sum_{i=1}^n \varepsilon_{i,0} (x_B - x_A) &= \sum_{i=1}^n \omega_{i,0}^2 (y_B - y_A) - \sum_{i=1}^n a_{Ai,i-1}^{ny} - 2 \sum_{i=1}^n \omega_{i,0} v_{Ai,i-1}^x \end{aligned} \quad (\text{j})$$

Pentru *primul ciclu*: 0 - A<sub>0</sub> - 1 - A - 2 - B<sub>23</sub> - 3 - B<sub>30</sub> - 0 relațiile (j) se scriu astfel:

$$\begin{aligned} a_{B32}^{tx} - \varepsilon_{10}(y_A - y_{A_0}) - \varepsilon_{20}(y_B - y_A) &= \omega_{10}^2(x_A - x_{A_0}) + \omega_{20}^2(x_B - x_A) + 2\omega_{20}v_{B32}^y \\ a_{B32}^{ty} + \varepsilon_{10}(x_A - x_{A_0}) + \varepsilon_{20}(x_B - x_A) &= \omega_{10}^2(y_A - y_{A_0}) + \omega_{20}^2(y_B - y_A) - 2\omega_{20}v_{B32}^x \\ a_{B32}^{tx} &= a_{B32} \cos(\pi - \psi); \quad a_{B32}^{ty} = a_{B32} \sin(\pi - \psi); \quad \varepsilon_{10} = 0 \end{aligned} \quad (\text{k})$$

Dacă se notează:

$$\begin{aligned} \omega_{10}^2(x_A - x_{A_0}) + \omega_{20}^2(x_B - x_A) + 2\omega_{20}v_{B32}^y &= L_{1x} \\ \omega_{10}^2(y_A - y_{A_0}) + \omega_{20}^2(y_B - y_A) - 2\omega_{20}v_{B32}^x &= L_{1y} \end{aligned} \quad (\text{l})$$

rezolvând acest sistem se obține:

$$\varepsilon_{20} = \frac{L_{1x} \sin \psi + L_{1y} \cos \psi}{(y_B - y_A) \sin \psi - (x_B - x_A) \cos \psi} \quad (\text{m})$$

$$a_{B32} = \frac{(x_B - x_A)L_{1x} + (y_B - y_A)L_{1y}}{(y_B - y_A) \sin \psi - (x_B - x_A) \cos \psi} \quad (\text{n})$$

Pentru *al II-lea ciclu*: 0 - B<sub>03</sub> - 3 - B<sub>32</sub> - 2 - C - 4 - D<sub>45</sub> - 5 - D<sub>50</sub> - 0 ecuațiile (j) se scriu astfel :

$$\begin{aligned} a_{B23}^{tx} + a_{D05}^{tx} - \varepsilon_{20}(y_C - y_B) - \varepsilon_{40}(y_D - y_C) &= \omega_{20}^2(x_C - x_B) + \omega_{40}^2(x_D - x_C) = L_{2x} \\ a_{B23}^{ty} + a_{D05}^{ty} + \varepsilon_{20}(x_C - x_B) + \varepsilon_{40}(x_D - x_C) &= \omega_{20}^2(y_C - y_B) + \omega_{40}^2(y_D - y_C) = L_{2y} \\ a_{B23}^{tx} &= a_{B23} \cos(\pi - \psi); \quad a_{B23}^{ty} = a_{B23} \sin(\pi - \psi); \quad a_{D05}^{tx} = 0; \quad a_{D05}^{ty} = a_{D05} = -a_{D50} \end{aligned} \quad (\text{o})$$

Rezolvând acest sistem se obține:

$$\varepsilon_{40} = \frac{\varepsilon_{20}(y_C - y_B) + a_{B23} \cos \psi + L_{2x}}{(y_D - y_C)} \quad (\text{p})$$

$$a_{D50} = \varepsilon_{20}(x_C - x_B) + \varepsilon_{40}(x_D - x_C) + a_{B23} \sin \psi - L_{2y}$$

Înlocuind valorile numerice se obțin următoarele rezultate:

$$tg\psi = 0,3997; \psi = 21,7868^{\circ}; \sin \theta = -0,22857; \theta = -13,213^{\circ}$$

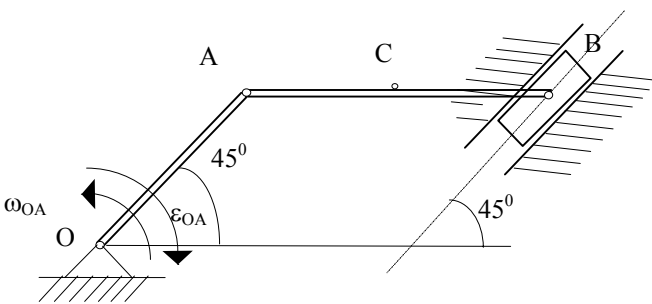
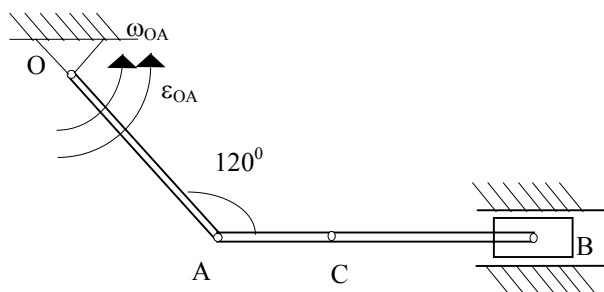
Pentru coordonatele cuplelor cinematice se obțin valorile:

Cupla cinematică	$A_0$	$A$	$B$	$C$	$D$
$x$ (mm)	0	15	80	135,714	130
$y$ (mm)	0	25,981	0	-22,269	2,069

Înlocuind aceste valori în expresiile (e), (f), (h), (i) se obțin vitezele  $\omega_{20}$ ,  $v_{B32}$ ,  $\omega_{40}$ ,  $v_{D50}$ . și în expresiile (m), (n), (p) se obțin accelerațiile  $\epsilon_{20}$ ,  $a_{B32}$ ,  $\epsilon_{40}$ ,  $a_{D50}$  cerute.

### PROBLEME PROPUSE

*Se consideră mecanismul din figurile 10.18. ... 24, din tabelul de mai jos având elementele geometrice și mecanice specificate. Se cer: vitezele și accelerațiile punctelor A, B și C*

 <p style="text-align: center;">Fig 10.18</p>	$OA = 2L, AB = 6L, AC = 3L$ (cm) $\omega_{OA} = 2\omega_0$ (s <sup>-1</sup> ), $\epsilon_{OA} = \omega_0^2$ (s <sup>-2</sup> )
 <p style="text-align: center;">Fig. 10.19</p>	$OA = 5L, AB = 7L, AC = 3L$ (cm) $\omega_{OA} = 2\omega_0$ (s <sup>-1</sup> ), $\epsilon_{OA} = 3\omega_0^2$ (s <sup>-2</sup> )

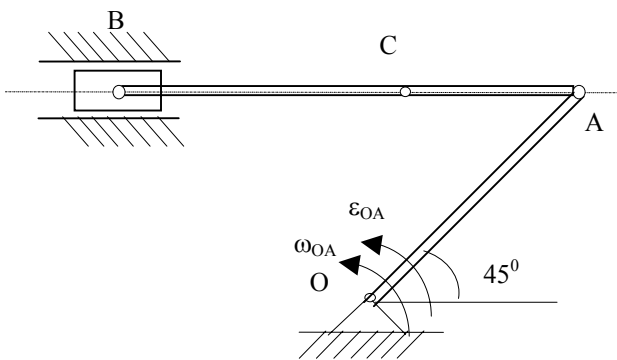


Fig. 10.20

$$OA = 35L, AB = 75L, AC = 60L (cm)$$

$$\omega_{OA} = 5\omega_0 (s^{-1}), \epsilon_{OA} = 10\omega_0^2 (s^{-2})$$

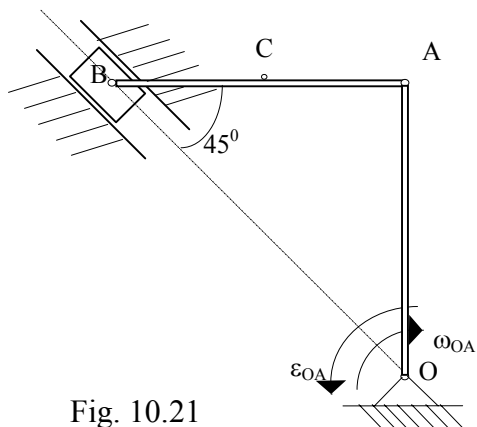


Fig. 10.21

$$OA = AB = 4L, AC = 2L (cm)$$

$$\omega_{OA} = \omega_0 (s^{-1}), \epsilon_{OA} = 2\omega_0^2 (s^{-2})$$

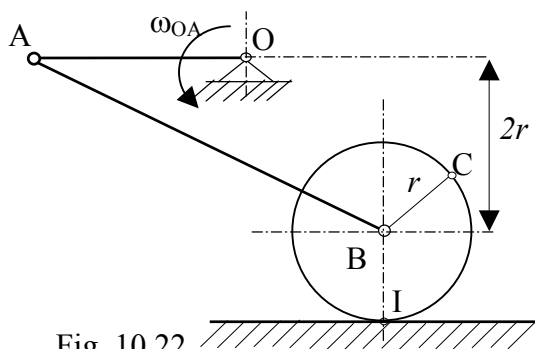


Fig. 10.22

$$OA = 23, AC = 57, r = 14 (cm)$$

$$\omega_o = 1,5 (s^{-1})$$

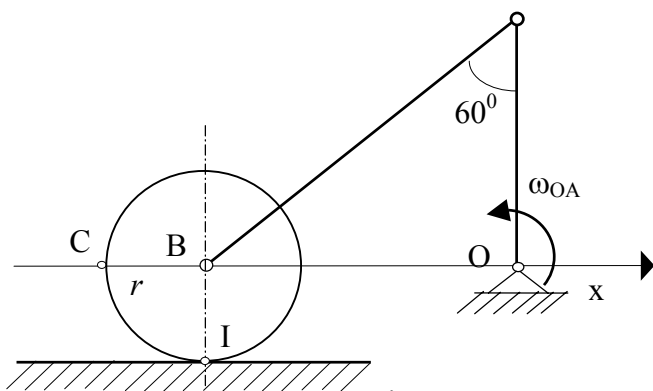
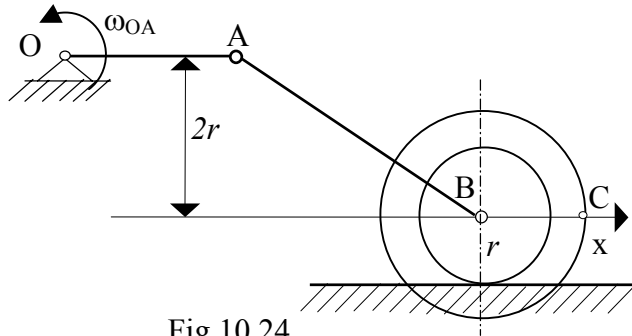


Fig. 10.23

$$OA = 25, AC = 60, r = 15 (cm)$$

$$\omega_o = 1,6 (s^{-1})$$



$OA = 16, AC = 60, r = 15 \text{ (cm)}$   
 $\omega_o = 1,6 \text{ (s}^{-1}\text{)}$

Fig.10.24

Date:  $A_0A = R = 20, A_0B = 60, A_0D = 50 \text{ (cm)}$   
 $\varphi = 45^\circ; \omega_{A_0A} = 1 \text{ (s}^{-1}\text{)}; \varepsilon_{A_0A} = 0$

**Se cer:** vitezele și accelerațiile punctelor A și C ,  
 vitezele și accelerațiile unghiulare ale elementului BC

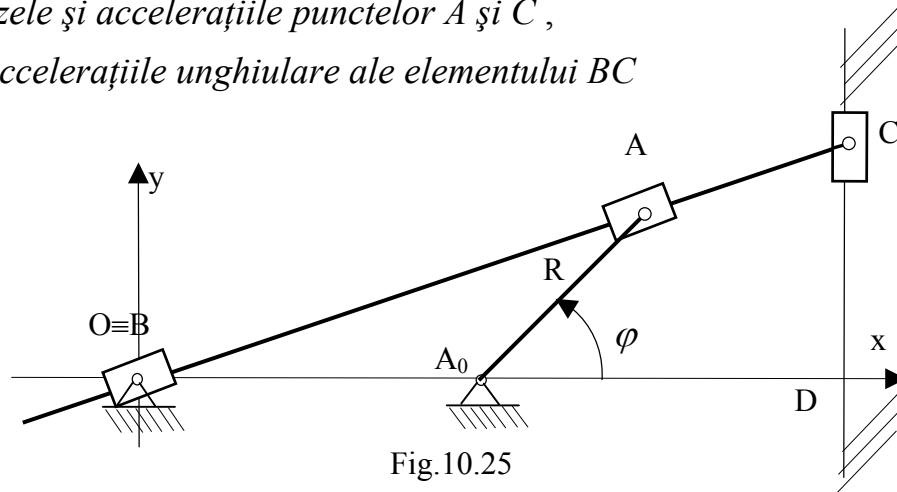


Fig.10.25

Date:  $A_0A = R = 20, A_0B = 60, BC = 100; A_0D = 80 \text{ (cm)}$   
 $\varphi = 30^\circ; \omega_{A_0A} = 1 \text{ (s}^{-1}\text{)}; \varepsilon_{A_0A} = 0$

**Se cer:** vitezele și accelerațiile punctelor A, B și C ,  
 vitezele și accelerațiile unghiulare ale elementului BC.

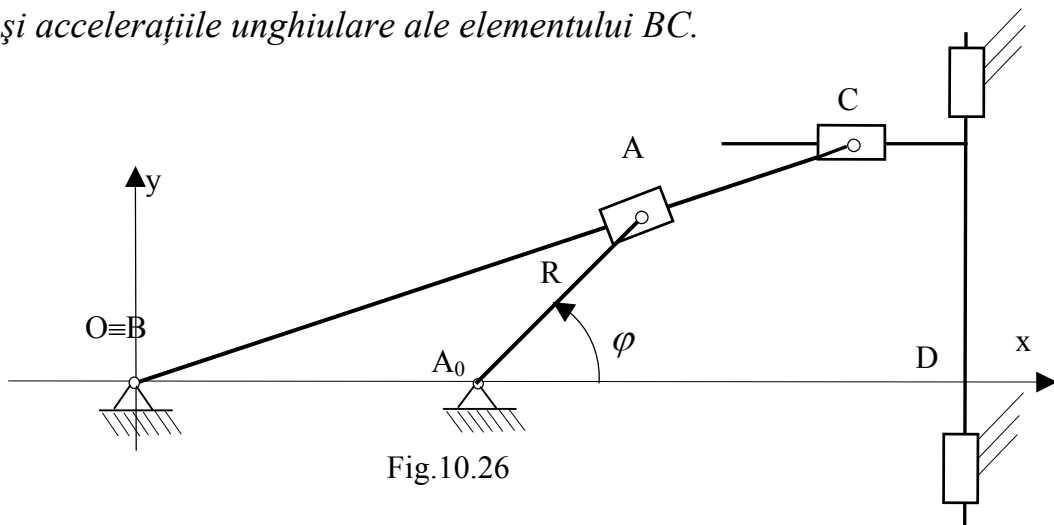


Fig.10.26

# CAPITOLUL XI

## CINEMATICA MIȘCĂRII RELATIVE

### A PUNCTULUI MATERIAL

#### PROBLEME REZOLVATE

**11.1** *Se consideră un cadru pătrat de latură  $2a$  pe a cărui latură se află un tub, în interiorul căruia se deplasează un punct material ( o bilă )  $M$ , plecând din  $O$  după legea:  $OM = s_r(t) = 18 \sin \frac{\pi}{4} t$  (cm). În același timp, cadrul se rotește în planul său, în jurul colțului  $O_1$  după legea:  $\varphi(t) = 2t^3 - t^2$  (rad )*

*Se cere să se determine: viteza și accelerația absolută a punctului material  $M$  pentru următorul caz particular:  $t_1 = \frac{2}{3} s$  și  $a = 25$  cm (fig.11.1).*

#### Rezolvare

1) Mișcarea punctului  $M$  în raport cu tub este *mișcarea relativă*, iar mișcarea de rotație a punctului  $M$  solidar legat de tub la un moment dat, în jurul punctului fix  $O_1$  este *mișcarea de transport*. Legile de variație ale spațiului pentru cele două mișcări sunt date prin enunțul problemei.

➤ Vitezele: relativă, de transport

și absolută , se scriu :

$$v_r = \frac{\partial s_r}{\partial t} = \frac{9}{2} \pi \cos \frac{\pi}{4} t$$

$$v_t = \frac{\partial \varphi}{\partial t} \cdot O_1M = (6t^2 - 2t) \sqrt{(2a)^2 + (a - s_r)^2} \quad (a)$$

$$v_a = \sqrt{v_r^2 + v_t^2 - 2v_r v_t \cos \alpha}$$

unde  $\alpha$  se determină din iar din triunghiul dreptunghic  $O_1AM$  cu ajutorul relațiilor:

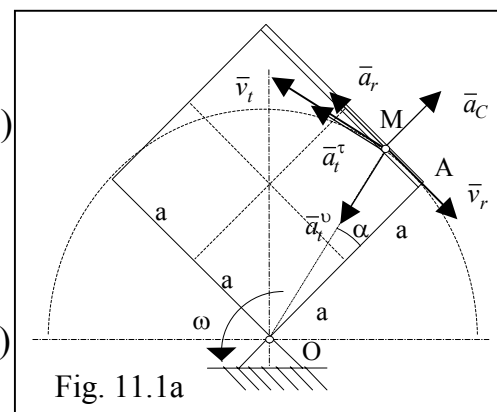
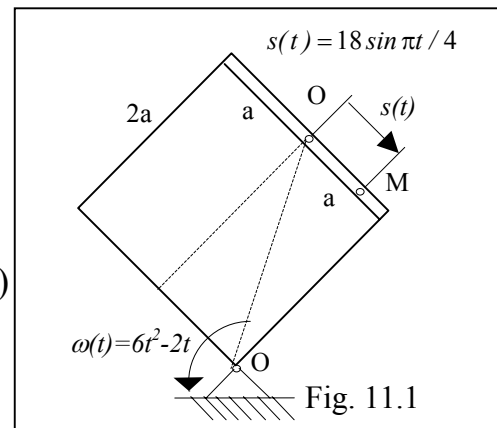
$$\cos \alpha = \frac{O_1A}{O_1M} = \frac{2a}{\sqrt{(2a)^2 + (a - s_r)^2}};$$

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$$

➤ Viteza și accelerația unghiulară a cadrului:

$$\omega = \dot{\varphi} = 6t^2 - 2t \quad \text{rad} / s$$

$$\varepsilon = \dot{\omega} = \ddot{\varphi} = 12t - 2 \quad \text{rad} / s^2$$



➤ Accelerația relativă este:  $a_r = \frac{\partial v_r}{\partial t} = -\frac{9\pi^2}{8} \sin \frac{\pi}{4} t$  (d)

➤ Accelerația Coriolis se scrie:  $\bar{a}_c = 2\bar{\omega} \times \bar{v}_r$  și deoarece  $\bar{\omega} \perp \bar{v}_r$  avem:

$$\bar{a}_c \perp \bar{v}_r, \quad a_c = 2\omega \cdot v_r = 18\pi t(3t - 1) \cdot \cos(\pi t / 4) \quad (e)$$

➤ Accelerația de transport are două componente:

$$\bar{a}_t^v = -\overline{O_1M} \cdot \omega^2 \quad \text{și} \quad \bar{a}_t^\tau = \bar{\varepsilon} \times \overline{O_1M} \quad \text{și deoarece } \bar{\varepsilon} \perp \overline{O_1M} \text{ avem:}$$

$$a_t^v = \sqrt{(2a)^2 + (a - s_r)^2} \cdot \omega^2 \quad \text{și} \quad a_t^\tau = \sqrt{(2a)^2 + (a - s_r)^2} \cdot \varepsilon \quad (f)$$

Proiectând pe axele Ox și Oy relația vectorială de compunere a accelerațiilor:  $\bar{a}_a = \bar{a}_r + \bar{a}_t^\tau + \bar{a}_t^v + \bar{a}_c$  se obține valoarea accelerației absolute:

$$\begin{cases} a_{ax} = -a_r - a_t^\tau \cos \alpha + a_t^v \sin \alpha \\ a_{ay} = -a_t^\tau \sin \alpha - a_t^v \cos \alpha + a_c \end{cases} \Rightarrow a_a = \sqrt{a_{ax}^2 + a_{ay}^2} \quad (g)$$

2) Pentru cazul particular  $t = t_1 = \frac{2}{3} s$  și  $a = 25 \text{ cm}$ , înlocuind în relațiile de mai sus se obțin valorile :

$\cos \alpha$	$\sin \alpha$	$O_1M$	$s$	$\omega$	$\varepsilon$	$v_r$	$v_t$	$v_a$	$a_r$	$a_c$	$a_t^v$	$a_t^\tau$
-	-	cm	cm	$s^{-1}$	$s^{-2}$	cm/s	cm/s	cm/s	cm/s <sup>2</sup>	cm/s <sup>2</sup>	cm/s <sup>2</sup>	cm/s <sup>2</sup>
0,95	0,31	52,5	9	1,33	6	12,24	70	58,5	5,55	32,6	93,3	315

$$\begin{cases} a_{ax} = -a_r - a_t^\tau \cos \alpha + a_t^v \sin \alpha = -276 \\ a_{ay} = -a_t^\tau \sin \alpha - a_t^v \cos \alpha + a_c = -154 \end{cases} \Rightarrow a_a = \sqrt{a_{ax}^2 + a_{ay}^2} \cong 316 \text{ cm/s}^2 \quad (h)$$

**11.2 Se consideră** cadrul triunghiular din figura 11.2 și un punct material M care se deplasează în interiorul tubului solidar cu cadrul, înclinat față de verticală cu unghiul  $\alpha = 30^\circ$ . Se cunosc legile pentru cele două mișcări:

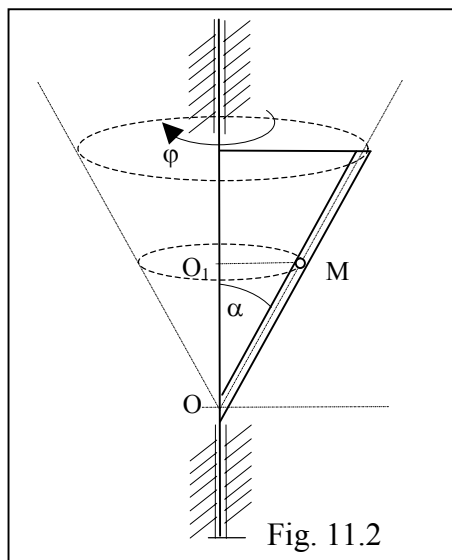


Fig. 11.2

- relativă:  $s_r = OM = 16 - 8\cos(3\pi t)$  (cm) .

- de transport care se rotește cadrul în jurul axei verticale:  $\varphi = 0,9t^2 - 9t^3 \text{ rad}$ .

**Se cere:** Să se determine poziția punctului M, viteza absolută ( $v_a$ ) și accelerația absolută ( $a_a$ ) la momentul  $t = t_1 = \frac{2}{9} s$ .

**Rezolvare :**

➤ Vitezele: relativă, de transport și absolută (fig. 11.1.a), se scriu :



$$\begin{cases} v_r = \frac{\partial s_r}{\partial t} = 24\pi \sin 3\pi t \\ v_t = \frac{\partial \varphi}{\partial t} \cdot O_1M = (1,8t - 27t^2) \sin \alpha \end{cases} \quad (a)$$

$$\Rightarrow v_a = \sqrt{v_r^2 + v_t^2}$$

➤ Viteza și accelerația unghiulară a cadrului:

$$\omega = \dot{\varphi} = 1,8t - 27t^2 \quad rad / s$$

$$\varepsilon = \dot{\omega} = \dot{\varphi} = 1,8 - 54t \quad rad / s^2$$

➤ Accelerația relativă :  $a_r = \frac{\partial v_r}{\partial t} = 72\pi^2 \cos 3\pi t$

➤ Accelerația Coriolis se scrie:

$$\bar{a}_c = 2\bar{\omega} \times \bar{v}_r \Rightarrow a_c = 2\omega v_r \sin(180 - \alpha)$$

➤ Accelerația de transport are două componente:

$$\bar{a}_t^v = -\bar{O}_1M \cdot \omega^2 \quad si \quad \bar{a}_t^v = \bar{\varepsilon} \times \bar{O}_1M$$

și deoarece  $\bar{\varepsilon} \perp \bar{O}_1M$  avem:

$$\begin{cases} a_t^v = O_1M \cdot \omega^2 = s \cdot \sin \alpha \cdot \omega^2 \\ a_t^v = O_1M \cdot \varepsilon = s \cdot \sin \alpha \cdot \varepsilon \end{cases}$$

Proiectând relația vectorială dintre accelerații pe axele de coordonate ( $Mxyz$ ), ca în fig. 11.2.b se obțin relațiile și valorile :

$$a_x = a_t^v + a_c$$

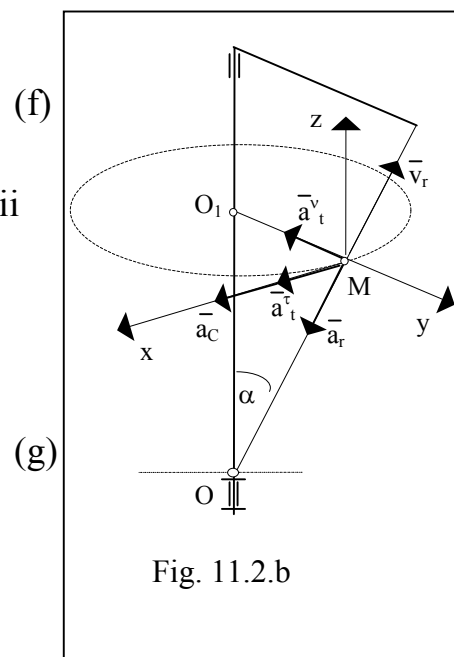
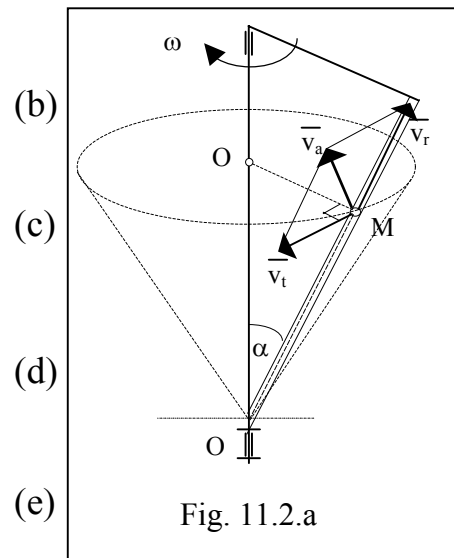
$$a_y = a_t^v - a_r^r \cos 60^0$$

$$a_y = -a_r^r \sin 60^0$$

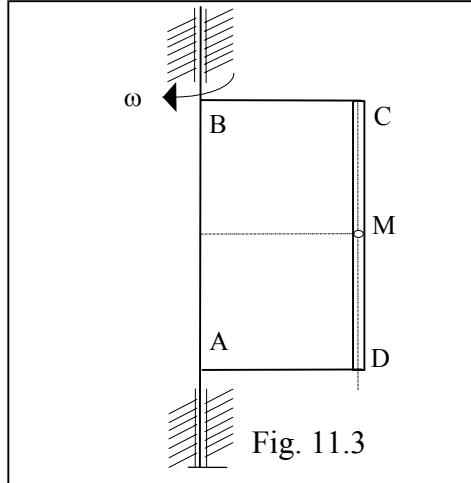
3) Pentru cazul particular  $t = t_1 = \frac{2}{9}s$  și  $\alpha = 30^0$ ,

înlocuind în relațiile de mai sus se obțin valorile din tabelul următor:

$\omega$	$v_r$	$v_t$	$v_a$	$\varepsilon$	$a_t^v$	$a_r^r$	$a_r^v$	$a_r^r$	$a_c$	$a_a$
$s^{-1}$	$cm/s$	$cm/s$	$cm/s$	$s^{-2}$	$cm/s^2$	$cm/s^2$	$cm/s^2$	$cm/s^2$	$cm/s^2$	$cm/s^2$
-0,93	65,2	9,3	65,9	-10,2	9	102	0	-355	61	345



**11.3** *Se consideră cadrul dreptunghiular ABCD (AD=a) din figura 11.3 care se rotește cu  $\omega = \omega_0$  (=constant) și un punct material M care cade liber (cu accelerația g) în interiorul tubului CD solidar cu cadrul, paralel cu axa verticală de rotație. Se cere să se determine viteza absolută ( $v_a$ ) și accelerația absolută ( $a_a$ ) la momentul t.*

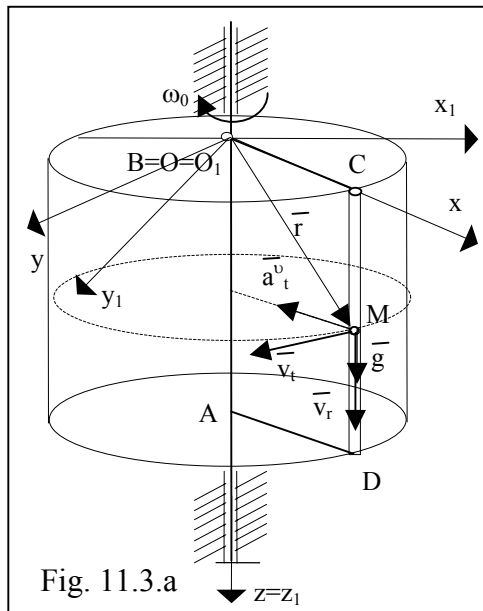


**Rezolvare :**

Se aleg axele fixe și mobile ca în fig.11.3.a. Sistemul mobil se rotește în același timp cu cadrul dreptunghiular în jurul lui AB.

Mișcarea relativă a punctului M în tubul CD este dată de legea :  $CM = \frac{gt^2}{2}$ , iar mișcarea de rotație a lui M (considerat fix pe cadru) de rază a și viteză unghiulară  $\omega_0$  este mișcarea de transport .

Calculul vitezei absolute la momentul t :



$$\bar{r} = \overline{BM} = a\bar{i} + \frac{gt^2}{2}\bar{k}$$

$$\bar{v}_0 = 0, \quad \bar{a}_0 = 0, \tag{a}$$

$$\bar{\omega} = \omega_0\bar{k}, \quad \bar{\varepsilon} = 0;$$

$$\bar{v}_a = \bar{v}_r + \bar{v}_t$$

unde  $\tag{b}$

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{v}_r = \frac{\partial \bar{r}}{\partial t} = g t \bar{k} \\ \bar{v}_t = \bar{\omega} \times \bar{r} = \omega_0 \bar{k} \times \left( a\bar{i} + \frac{gt^2}{2}\bar{k} \right) = \omega_0 a \bar{j} \end{array} \right.$$

$$\bar{v}_a = \omega_0 a \bar{j} + g t \bar{k} \Rightarrow v_a = \sqrt{a^2 \omega_0^2 + g^2 t^2} \tag{c}$$

Calculul accelerației absolute la momentul t :

$$\bar{a}_a = \bar{a}_r + \bar{a}_t + \bar{a}_c, \quad \text{unde:}$$

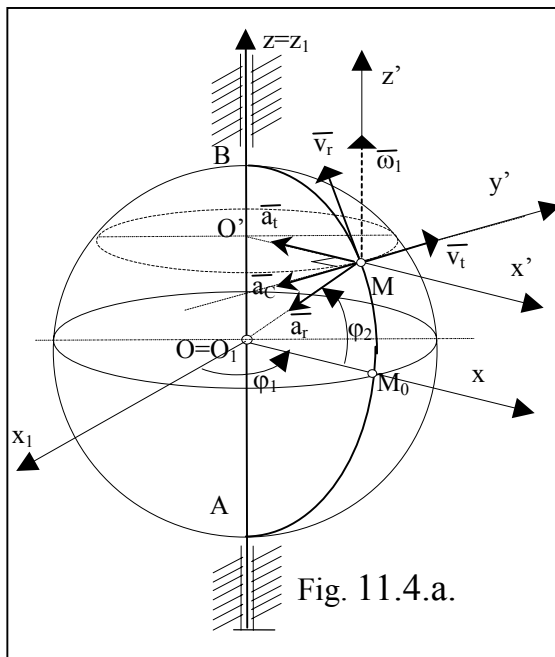
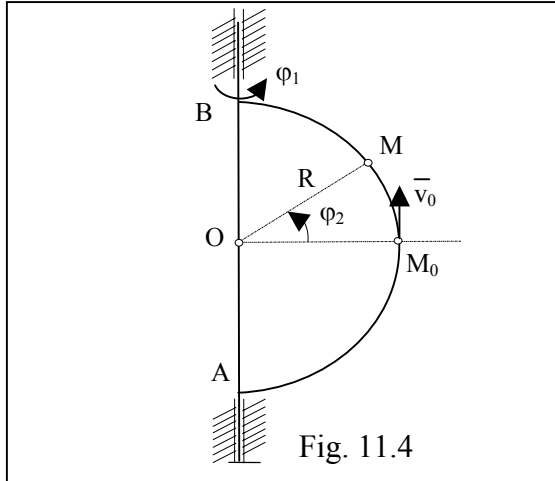
$$\bar{a}_r = \frac{\partial \bar{v}_r}{\partial t} = g \bar{k}; \tag{d}$$

$$\bar{a}_t = \bar{\varepsilon} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}) = \omega_0 \bar{k} \times \omega_0 a \bar{j} = -\omega_0^2 a \bar{i} \Rightarrow a_t^r = 0, \quad a_t^v = \omega^2 a$$

$$\bar{a}_c = 2\bar{\omega} \times \bar{v}_r = 2\omega_0 \bar{k} \times g t \bar{k} = 0$$

Rezultă :  $\bar{a}_a = g\bar{k} - \omega_0^2 a \bar{i}$  este cuprinsă într-un plan meridian al cilindrului și are valoarea constantă:  $a_a = \sqrt{g^2 + \omega^4 a^2}$ .  $\tag{e}$

**11.4** *Se consideră cadrul semicircular AB de rază R din figura 11.4 care se rotește cu viteza unghiulară  $\omega = \omega_0$  (constantă) în jurul unui diametru vertical și un punct material M care se deplasează pe arcul AB solidar cu cadrul plecând din  $M_0$ , cu viteza constantă  $v_0$  (constantă). Se cere să se determine viteza absolută ( $v_a$ ) și accelerația absolută ( $a_a$ ) la momentul t.*



**Rezolvare:**

Punctul M, în mișcarea sa relativă pleacă din  $M_0$  și parcurge unghiul la centru  $\varphi_2$ , și în același timp arcului semicircular se rotește în mișcarea sa de transport cu unghiul  $\varphi_1$ . Vitezele unghiulare respective sunt:  $\omega_1 = \omega_0$  respectiv  $\omega_2 = v_0/R$  iar accelerațiile unghiulare:  $\varepsilon_2 = 0, \varepsilon_1 = 0$ . Se aleg cele două sisteme de axe (sistemul fix  $O_1x_1y_1$  și mobil  $Oxy$ ) ca în figura 11.4.a.

Viteza absolută :  $\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_t$  (a)

unde vectorii  $\vec{v}_r, \vec{v}_t$  au direcțiile și sensurile din fig. 11.4.a., conform definiției lor, iar mărimile sunt :

$v_r = v_0, v_t = O'M \cdot \omega_1 = R\omega_0 \cos \varphi_2$   
 $\Rightarrow v_a = \sqrt{v_r^2 + v_t^2} = \sqrt{v_0^2 + \omega_0^2 R^2 \cos^2 \varphi_2}$  (b)

Accelerația absolută:  $\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_t + \vec{a}_c$

Întrucât accelerațiile unghiulare  $\varepsilon_1 = 0, \varepsilon_2 = 0$ , rezultă că accelerațiile  $\vec{a}_r, \vec{a}_t$  au decât componentele normale diferite de zero, cele tangențiale fiind nule

$a_r = a_r^v = \frac{v_r^2}{R} = \frac{v_0^2}{R}, a_t = a_t^v = O'M \cdot \omega_1^2 = R\omega_0^2 \cos \varphi_2$  (c)

$\vec{a}_c = 2\vec{\omega}_1 \times \vec{v}_r \Rightarrow a_c = 2\omega_0 v_0 \sin \varphi_2$

Mărimia accelerației absolute se obține proiectând pe trei axe  $Mx'y'z'$  astfel:

$a_x = -a_r \cos \varphi_2 - a_t = -\frac{v_0^2}{R} \cos \varphi_2 - R\omega_0^2 \cos \varphi_2 = -\left(\frac{v_0^2}{R} + R\omega_0^2\right) \cos \varphi_2$   
 $a_y = -a_c = -2\omega_0 v_0 \sin \varphi_2; a_z = -a_r \sin \varphi_2 = -\frac{v_0^2}{R} \sin \varphi_2$  (d)

$a_a = a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{\left(\frac{v_0^2}{R} + R\omega_0^2\right)^2 \cos^2 \varphi_2 + \left(4\omega_0^2 v_0^2 + \frac{v_0^4}{R^2}\right) \sin^2 \varphi_2}$

**11.5.** *Se consideră un cursor M care pleacă din A având viteza inițială zero pe un inel circular AB de rază  $R=OM$  cu viteza unghiulară  $\omega_r=\omega_1=\varepsilon_1 t$  ( $\varepsilon_1=\text{constant}$ ) iar inelul se rotește în jurul diametrului vertical AB cu viteza unghiulară  $\omega_t=\omega_2=\varepsilon_2 t$  ( $\varepsilon_2=\text{constant}$ ) ca în figura 11.5. **Se cere** să se determine viteza absolută ( $v_a$ ) și accelerația absolută ( $a_a$ ) la momentul t oarecare.*

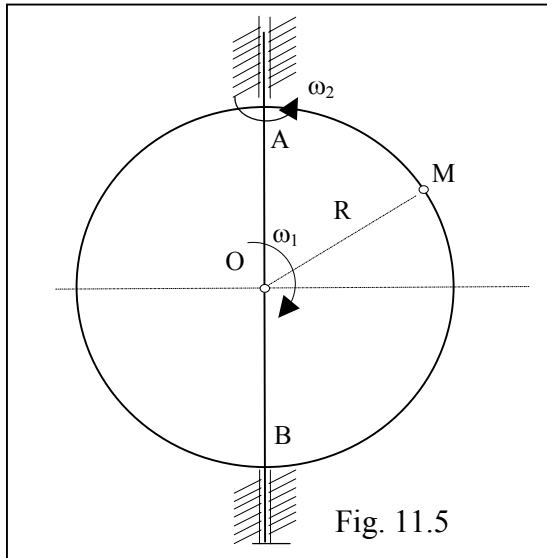


Fig. 11.5

**Rezolvare:**

Punctul M, în mișcarea sa relativă pleacă din A și parcurge inelul circular cu viteza unghiulară  $\omega_r=\omega_1=\varepsilon_1 t$ , și în același timp inelul circular se rotește în jurul diametrului vertical AB în mișcarea sa de transport cu viteza unghiulară  $\omega_t=\omega_2=\varepsilon_2 t$ ; accelerațiile unghiulare sunt constante:  $\varepsilon_2 = ct.$ ,  $\varepsilon_1 = ct.$ . Se aleg cele două sisteme de axe (fix  $O_1x_1y_1$  și mobil  $Oxy$ ) ca în figura 11.5.a.

a. *Calculul vitezei absolute:*

$$\bar{v}_a = \bar{v}_r + \bar{v}_t \tag{a}$$

unde vitezele  $\bar{v}_r, \bar{v}_t$  au direcțiile și sensurile din fig. 11.5.a, fiind perpendiculare și având mărimile:

$$v_r = R\omega_1, \quad v_t = R\omega_2 \sin \varphi_1, \text{ deci:}$$

$$\Rightarrow v_a = \sqrt{v_r^2 + v_t^2} = R\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2 \sin^2 \varphi_1} \tag{b}$$

unde:  $\varphi_1 = \frac{1}{2} \varepsilon_1 t^2$  (deoarece punctul pleacă din A având viteza inițială zero)

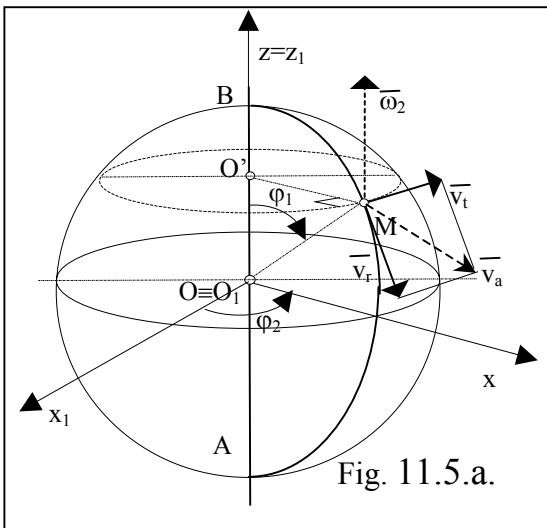


Fig. 11.5.a.

b. *Calculul accelerației absolute :*

$$\bar{a}_a = \bar{a}_r + \bar{a}_t + \bar{a}_c \tag{c}$$

Întrucât accelerațiile unghiulare sunt nenule ( $\varepsilon_1 \neq 0, \varepsilon_2 \neq 0$ ), rezultă că accelerațiile  $\bar{a}_r, \bar{a}_t$  au atât componentele normale cât și tangențiale:

$$\bar{a}_r = \bar{a}_r^v + \bar{a}_r^t; \quad a_r^v = R\omega_1^2, \quad a_r^t = R\varepsilon_1$$

$$\bar{a}_t = \bar{a}_t^v + \bar{a}_t^t; \quad a_t^v = R \sin \varphi_1 \cdot \omega_2^2; \quad a_t^t = R \sin \varphi_1 \cdot \varepsilon_2 \tag{d}$$

$$\bar{a}_c = 2\bar{\omega}_2 \times \bar{v}_r \Rightarrow a_c = 2R\omega_2\omega_1 \sin\left(\varphi_1 + \frac{\pi}{2}\right)$$

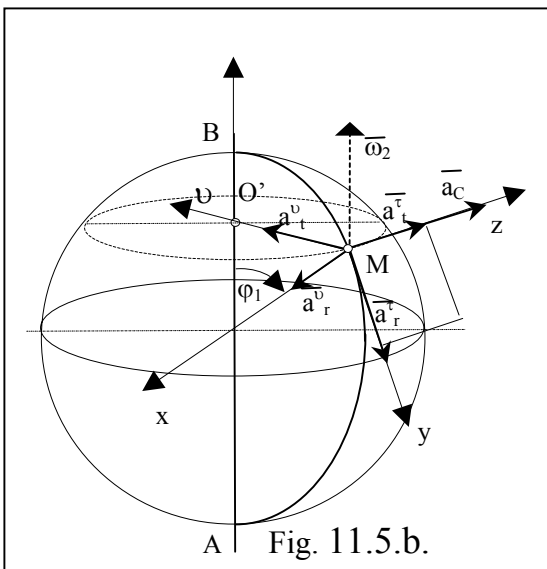


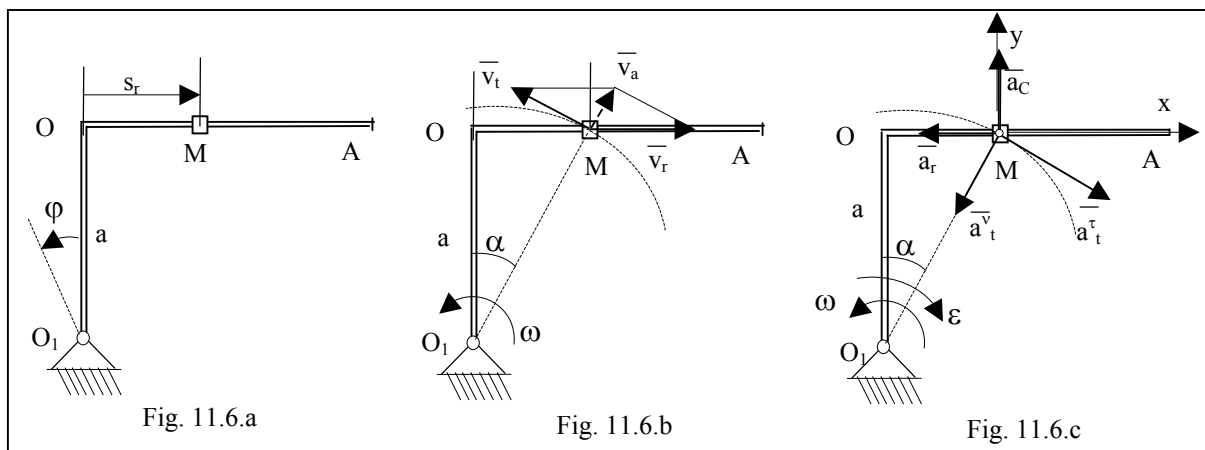
Fig. 11.5.b.

Pentru a determina mărimea accelerației absolute se proiectează relația (b) pe cele trei axe de coordonate  $Mx$ ,  $My$ ,  $Mz$  din fig. 11.5.b, astfel încât avem:

$$\begin{aligned} a_x &= a_r^v + a_t^v \sin \varphi_1 = R(\omega_1^2 + \omega_2^2 \sin^2 \varphi_1) \\ a_y &= a_r^r - a_t^v \cos \varphi_1 = R(\varepsilon_1 - \omega_2^2 \sin \varphi_1 \cos \varphi_1) \\ a_z &= a_t^r + a_c = R(\varepsilon_2 \sin \varphi_1 + 2\omega_1 \omega_2 \cos \varphi_1) \end{aligned} \quad (e)$$

$$a_a = R\sqrt{(\omega_1^2 + \omega_2^2 \sin^2 \varphi_1)^2 + (\varepsilon_1 - \omega_2^2 \sin \varphi_1 \cos \varphi_1)^2 + (\varepsilon_2 \sin \varphi_1 + 2\omega_1 \omega_2 \cos \varphi_1)^2}$$

**11.6** Se consideră un cursor  $M$  care se deplasează pe bara cotită  $O_1OA$  ( $\angle O_1OA=90^\circ$ ,  $O_1O=a=20\text{cm}$ ) după legea  $OM=s_r(t)=20\sin\pi t$  (cm). În același timp bara se rotește în jurul punctului fix  $O_1$  după legea:  $\varphi(t)=t-0,5t^2$ , în sens trigonometric ca în figura 11.6.a. Se cere să se determine viteza absolută ( $v_a$ ) și accelerația absolută ( $a_a$ ) la momentul  $t_1=1/3$  s



**Rezolvare:**

*Mișcarea relativă* este mișcarea rectilinie a cursorului  $M$  de la  $O$  spre  $A$  conform legii date  $s_r(t)=20\sin\pi t$

*Mișcarea de transport* este mișcarea punctului  $M$  al cadrului care coincide cu cursorul pentru momentul considerat (sau mișcarea cursorului împreună cu cadrul dacă încetează mișcarea relativă), deci o mișcare circulară  $\varphi(t)=t-0,5t^2$  cu viteza și accelerația unghiulară:  $\omega=1-t$ ;  $\varepsilon=-1$ , pe cercul de rază:

$$O_1M = \sqrt{a^2 + s_r^2}$$

Viteza absolută este dată de relația vectorială:  $\bar{v}_a = \bar{v}_r + \bar{v}_t$  (a)

unde vitezele  $\bar{v}_r, \bar{v}_t$  au direcțiile și sensurile din fig. 11.6.b, având mărimile:

$$\begin{aligned} v_r &= \dot{s}_r = 20\pi \cos\pi t, \quad v_t = O_1M \cdot \omega = (1-t)\sqrt{a^2 + (20\sin\pi t)^2} \\ \Rightarrow v_a &= \sqrt{v_r^2 + v_t^2 + 2v_r v_t \cos(\pi - \alpha)} \end{aligned} \quad (b)$$

$$v_a = \sqrt{(20\pi \cos\pi t)^2 + (1-t)^2 [a^2 + (20\sin\pi t)^2] - 40\pi \cdot \cos\alpha \cdot \cos\pi t \cdot (1-t) \cdot \sqrt{a^2 + (20\sin\pi t)^2}}$$

unde  $\alpha$  este unghiul  $OO_1M$ , conform fig. 11.6.b,c:  $\cos \alpha = a / \sqrt{a^2 + s^2}$

Accelerația absolută este dată de relația vectorială:

$$\bar{a}_a = \bar{a}_r + \bar{a}_t + \bar{a}_C \tag{c}$$

unde accelerațiile unghiulare au sensurile și direcțiile prezentate în fig. 11.6.c, și mărimile date de:

$$a_r = \dot{v}_r = \ddot{s}_r \Rightarrow a_r = |-20\pi^2 \sin\pi t|,$$

$$\bar{a}_t = \bar{a}_t^v + \bar{a}_t^r; \quad a_t^v = \omega^2 \cdot O_1M = (1-t)^2 \cdot \sqrt{a^2 + (20\sin\pi t)^2};$$

$$a_t^r = |\varepsilon \cdot O_1M| = \sqrt{a^2 + (20\sin\pi t)^2}$$

$$\bar{a}_C = 2\bar{\omega} \times \bar{v}_r \Rightarrow a_C = |40\pi\omega \sin\pi t|$$

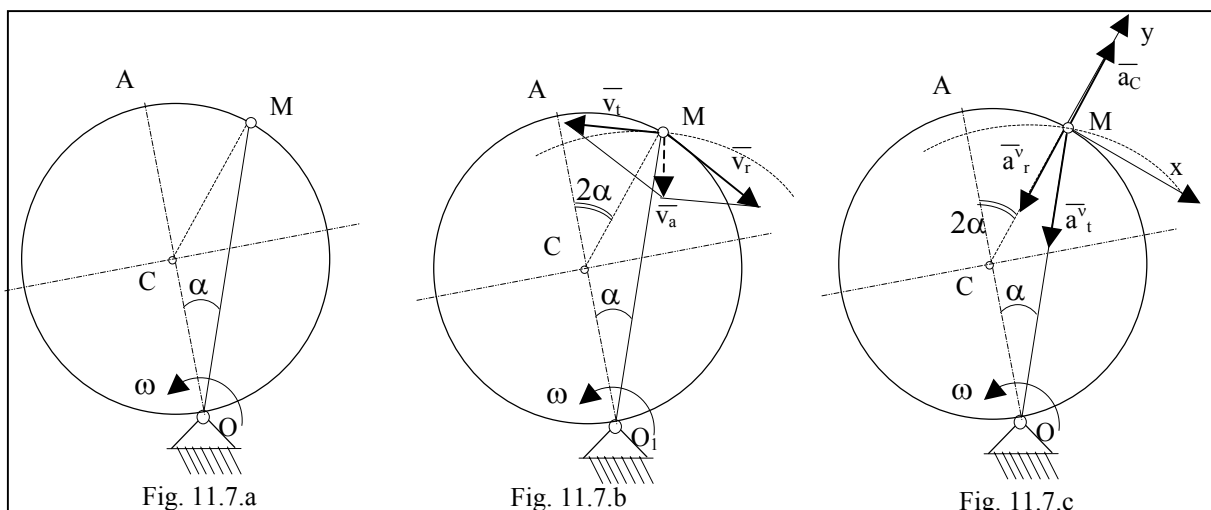
Pentru a determina mărimea accelerației absolute se proiectează relația (b) pe cele două axe de coordonate  $Mx$  și  $My$  din fig. 11.6.c, astfel încât avem:

$$\begin{cases} a_x = -a_r - a_t^v \sin \alpha + a_t^r \cos \alpha \\ a_y = a_C - a_t^v \cos \alpha - a_t^r \sin \alpha \end{cases} \Rightarrow a_a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} \tag{e}$$

Înlocuind în relațiile de mai sus  $t=1/3$  s se obțin valorile numerice din tabelul următor:

$v_r$	$v_t$	$v_a$	$a_r$	$a_t^r$	$a_t^v$	$a_C$	$a_{ax}$	$a_{ay}$	$a_a$
cm/s	cm/s	cm/s	cm/s <sup>2</sup>	cm/s <sup>2</sup>	cm/s <sup>2</sup>	cm/s <sup>2</sup>	cm/s <sup>2</sup>	cm/s <sup>2</sup>	cm/s <sup>2</sup>
31,416	17,638	21,455	170,95	26,457	11,76	41,888			

**11.7 Se consideră un cursor  $M$  care se deplasează pe un cadru circular de rază  $R$ , cu viteză relativă constantă  $u=const.$ , pornind la momentul inițial din punctul  $A$  diametral opus punctului  $O_1$ . În același timp cadrul se rotește în jurul punctului fix  $O_1$  viteza unghiulară constantă  $\omega=const.$ , în sens trigonometric ca în figura 11.7.a. Se cere să se determine viteza absolută ( $v_a$ ) și accelerația absolută ( $a_a$ ) la momentul  $t$ .**



**Rezolvare:**

*Mișcarea relativă* este mișcarea circulară a cursorului M pe cadrul circular în sensul acelor de ceas, pornind din A cu viteza constantă  $v_r = u$ .

*Mișcarea de transport* este mișcarea punctului M al cadrului care coincide cu cursorul pentru momentul considerat (sau mișcarea cursorului împreună cu cadrul circular dacă încetează mișcarea relativă), deci o mișcare circulară având viteza unghiulară  $\omega = \text{constant}$  și accelerația unghiulară  $\varepsilon = 0$ , pe cercul de rază:

$$O_1M = 2R \cos \alpha, \text{ unde } 2\alpha = \frac{s}{R} \Rightarrow \alpha = \frac{u}{2R}t$$

$$\text{Viteza absolută este dată de relația vectorială: } \bar{v}_a = \bar{v}_r + \bar{v}_t \quad (\text{a})$$

unde vitezele  $\bar{v}_r, \bar{v}_t$  au direcțiile și sensurile din fig. 11.7.b, având mărimile:

$$v_r = u; \quad v_t = O_1M \cdot \omega = 2R \cos \alpha \cdot \frac{u}{R} = 2 \cos \alpha \cdot u \quad (\text{b})$$

$$\Rightarrow v_a = \sqrt{v_r^2 + v_t^2 + 2v_r v_t \cos(\pi - \alpha)} = u \sqrt{1 + 4 \cos^2 \alpha}$$

*Accelerația absolută* este dată de relația vectorială:

$$\bar{a}_a = \bar{a}_r + \bar{a}_t + \bar{a}_c \quad (\text{c})$$

unde accelerațiile unghiulare au sensurile și direcțiile prezentate în fig. 11.7.c, și mărimile date de:

$$\bar{a}_r = \bar{a}_r^v + \bar{a}_r^t; \Rightarrow a_r^v = \omega_r \cdot R = \frac{u^2}{R}; \quad a_r^t = \varepsilon_r \cdot R = 0$$

$$\bar{a}_t = \bar{a}_t^v + \bar{a}_t^t; \Rightarrow a_t^v = \omega^2 \cdot O_1M = 2R\omega^2 \cdot \cos \alpha; \quad a_t^t = \varepsilon \cdot O_1M = 0 \quad (\text{d})$$

$$\bar{a}_c = 2\bar{\omega} \times \bar{v}_r; \Rightarrow a_c = 2\omega \cdot u$$

Pentru a determina mărimea accelerației absolute se proiectează relația (b) pe cele două axe de coordonate  $Mx$  și  $My$  din fig. 11.7.c, astfel încât avem:

$$a_x = a_t^v \sin \alpha = R\omega^2 \sin 2\alpha$$

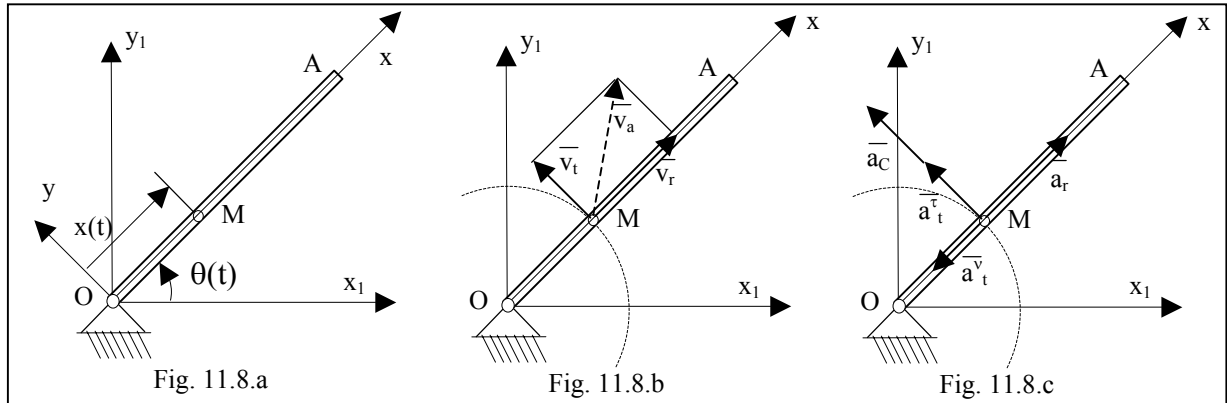
$$a_y = a_c - a_t^v \cos \alpha - a_r^v = 2\omega u - 2R\omega^2 \cos^2 \alpha - \frac{u^2}{R}$$

$$a_a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} \quad (\text{e})$$

$$a_a = \sqrt{(R\omega^2 \sin 2\alpha)^2 + \left(2R\omega^2 \cos^2 \alpha - \frac{u^2}{R}\right)^2}$$

**11.8** *Se consideră un tub OA care se rotește în sens trigonometric în jurul punctului fix O după legea  $\theta = \theta(t)$ . În același timp o bilă M se deplasează în interiorul tubului din O spre A, după legea:  $x = x(t)$ , ca în figura 11.8.a.*

*Se cere să se determine viteza absolută ( $v_a$ ) și accelerația absolută ( $a_a$ ) la momentul t.*



**Rezolvare:**

Se consideră sistemele de axe: fix  $O_1x_1y_1$  și mobil  $Ox_1y_1$ . Mișcarea absolută a punctului M este reprezentată de ecuațiile parametrice:

$$\begin{cases} x_1 = x \cos \theta \\ y_1 = x \sin \theta \end{cases} \quad (a)$$

Viteza absolută este dată de relația vectorială:  $\bar{v}_a = \bar{v}_r + \bar{v}_t$  (b)

unde vitezele  $\bar{v}_r, \bar{v}_t$  sunt perpendiculare având direcțiile și sensurile din fig. 11.8.b și mărimile:

$$\begin{aligned} v_r &= \dot{x}; \quad v_t = OM \cdot \omega = x \cdot \dot{\theta} \\ \Rightarrow v_a &= \sqrt{v_t^2 + v_r^2} = \sqrt{x^2 \dot{\theta}^2 + \dot{x}^2} \end{aligned} \quad (c)$$

Accelerația absolută este dată de relația vectorială:

$$\bar{a}_a = \bar{a}_r + \bar{a}_t + \bar{a}_c \quad (d)$$

unde accelerațiile unghiulare au sensurile și direcțiile prezentate în fig. 11.8.c, și mărimile date de:

$$\begin{aligned} a_r &= \dot{v}_r = \ddot{x} \\ \bar{a}_t &= \bar{a}_t^v + \bar{a}_t^\tau; \quad \Rightarrow a_t^v = \omega^2 \cdot OM = x \cdot \dot{\theta}^2; \quad a_t^\tau = \varepsilon \cdot OM = x \cdot \ddot{\theta} \end{aligned} \quad (e)$$

$$\bar{a}_c = 2\bar{\omega} \times \bar{v}_r \Rightarrow a_c = 2\dot{x} \cdot \dot{\theta}$$

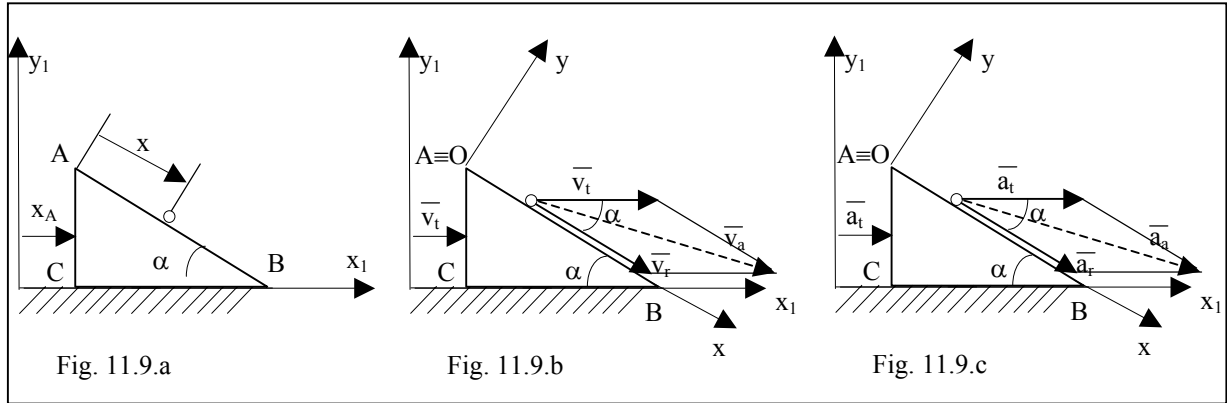
Pentru a determina mărimea accelerației absolute se proiectează relația (d) pe cele două axe de coordonate  $Mx$  și  $My$  din fig. 11.8.c, astfel încât avem:

$$\begin{aligned} a_x &= a_r - a_t^v = \ddot{x} - x\dot{\theta}^2 \\ a_y &= a_c + a_t^\tau = 2\dot{x}\dot{\theta} + x\ddot{\theta} \end{aligned} \quad (f)$$

$$\Rightarrow a_a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{(\ddot{x} - x\dot{\theta}^2)^2 + (2\dot{x}\dot{\theta} + x\ddot{\theta})^2}$$



**11.9** Se consideră o prismă de secțiune  $ABC$  având unghiul la vârf  $ABC = \alpha$  și înălțimea  $AC = h$ , având o mișcare de translație după după legea  $x_A(t) = a_1 t^2 / 2$ ; pe latura  $AB$  se deplasează punctul  $M$  după legea  $AM = x(t) = at^2 / 2$ , ca în figura 11.9.a. Se cere să se determine traiectoria punctului  $M$ , viteza absolută ( $v_a$ ) și accelerația absolută ( $a_a$ ) la momentul  $t$ .



**Rezolvare:**

Se consideră sistemele de axe: fix  $O_1x_1y_1$  și mobil  $Oxyz$  (fig. 11.8.b). Mișcarea relativă și de transport a punctului  $M$  este dată de ecuațiile parametrice:

$$\begin{cases} x = x_r = \frac{1}{2}at^2; & x_A = x_t = \frac{1}{2}a_1t^2 \end{cases} \quad (a)$$

Viteza absolută este dată de relația vectorială:  $\bar{v}_a = \bar{v}_r + \bar{v}_t$

unde vitezele  $\bar{v}_r, \bar{v}_t$  au direcțiile și sensurile din fig. 11.9.b și mărimile:

$$\begin{aligned} v_r = \dot{x} = at; & \quad v_t = \dot{x}_A = a_1t \\ \Rightarrow v_a = \sqrt{v_t^2 + v_r^2 + 2v_r v_t \cos\alpha} = t \cdot \sqrt{a^2 + a_1^2 + 2a \cdot a_1 \cdot \cos\alpha} \end{aligned} \quad (b)$$

Accelerația absolută este dată de relația vectorială:  $\bar{a}_a = \bar{a}_r + \bar{a}_t + \bar{a}_c$

unde accelerațiile unghiulare au sensurile și direcțiile prezentate în fig. 11.9.c, și mărimile date de:

$$\begin{aligned} a_r = \ddot{x} = a; & \quad a_t = \ddot{x}_A = a_1; \quad a_c = 0 \\ \Rightarrow a_a = \sqrt{a_t^2 + a_r^2 + 2a_r a_t \cos\alpha} = \sqrt{a^2 + a_1^2 + 2a \cdot a_1 \cdot \cos\alpha} \end{aligned} \quad (c)$$

Ecuațiile parametrice ale traiectoriei sunt:

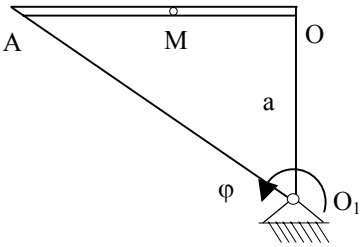
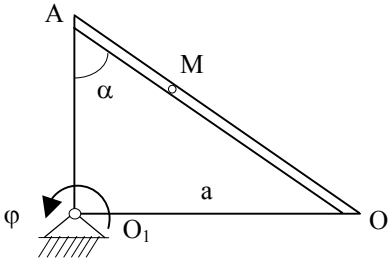
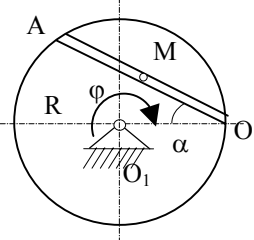
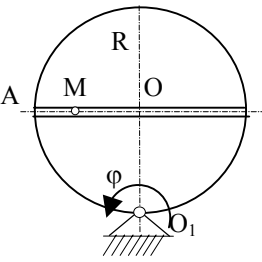
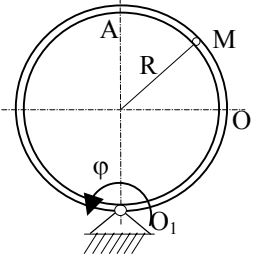
$$\begin{cases} x_1 = x_A + x \cos\alpha = \frac{1}{2}t^2(a_1 + a \cos\alpha) \\ y_1 = h - x \sin\alpha = h - \frac{1}{2}at^2 \sin\alpha \end{cases} \quad (d)$$

Eliminând timpul din cele două ecuații (d) se obține ecuația unei drepte ce

trece prin punctul  $A(0,h)$ :  $y_1 + \frac{a \sin\alpha}{a_1 + a \cos\alpha} x_1 - h = 0.$  (e)

PROBLEME PROPUSE

Se consideră un tub  $OA$  care se rotește în sensul indicat în figura corespunzătoare în jurul punctului fix  $O_1$  după legea  $\varphi = \varphi(t)$ . În același timp o bilă  $M$  se deplasează în interiorul tubului din  $O$  spre  $A$ , după legea:  $s = s_r(t)$ . Se cere să se determine viteza absolută ( $v_a$ ) și accelerația absolută ( $a_a$ ) la momentul  $t_1$  specificat pentru fiecare caz în parte

Nr.probl.	Figura problemei	Datele problemei
11.10		$OM = s_r(t) = 25 \sin \frac{\pi}{3} t \text{ (cm)}$ $\varphi = 2t^2 - 0,5t \text{ (rad)}$ $a = 25 \text{ (cm)}$ ; $t_1 = 2 \text{ s}$
11.11		$OM = s_r(t) = 5\sqrt{2}(t + t^2) \text{ (cm)}$ $\varphi = 0,2t^3 + t \text{ (rad)}$ $a = 60 \text{ (cm)}$ ; $\alpha = 45^0$ $t_1 = 2 \text{ s}$
11.12		$OM = s_r(t) = 6\sqrt{6} \sin \frac{\pi}{16} t \text{ (cm)}$ $\varphi = 0,6t^2 \text{ (rad)}$ $R = 36 \text{ (cm)}$ ; $\alpha = 30^0$ $t_1 = 2 \text{ s}$
11.13		$OM = s_r(t) = 20 \sin \pi t \text{ (cm)}$ $\varphi = 0,4t^2 \text{ (rad)}$ $R = 20 \text{ (cm)}$ ; $t_1 = 2/3 \text{ s}$
11.14		$OM = s_r(t) = 75\pi(0,1t + 0,3t^2) \text{ (cm)}$ $\varphi = 2t - 0,3t^2 \text{ (rad)}$ $R = 30 \text{ (cm)}$ ; $t_1 = 1 \text{ s}$

## CAPITOLUL XII

### DINAMICA MIȘCĂRII RELATIVE

#### A PUNCTULUI MATERIAL

**12.1.** *Se consideră cadrul  $OABC$  din figura 12.1.a format dintr-un tub  $OA$  înclinat cu unghiul  $\alpha$  față de axa de rotație, situat în plan vertical, care se rotește în jurul axei verticale  $BC$  cu viteza unghiulară  $\omega = \text{constant}$ . În același timp, în interiorul tubului se deplasează fără frecare un punct material  $M$  (o bilă) de masă  $m$ , pornind din punctul  $O$  fără viteză inițială. Se mai cunosc lungimile  $CO = a$  și  $CB = h$ .*

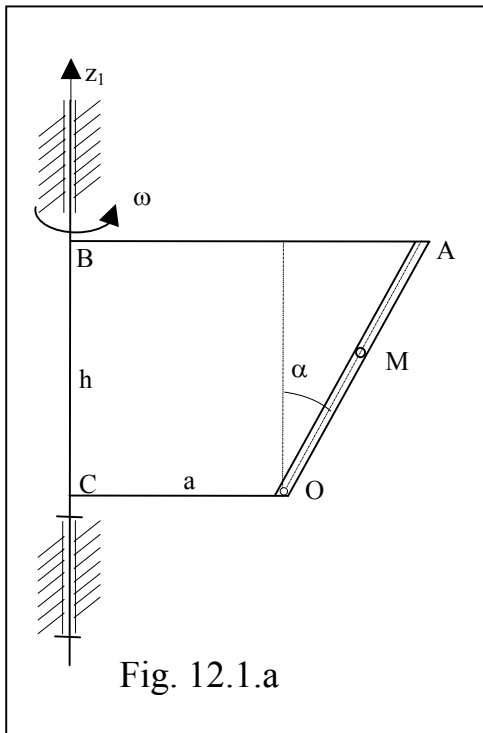


Fig. 12.1.a

**Se cere:**

1. să se deducă ecuațiile mișcării relative a punctului  $M$  în interiorul tubului și soluția ecuației diferențiale respective.
2. să se determine forța de presiune pe care o exercită punctul  $M$  de masă  $m$  asupra pereților tubului.
3. Să se determine distanța  $OM$  pentru poziția de repaus relativ al punctului  $M$  față de tub

**Rezolvare:**

Se aleg cele două sisteme de axe ca în fig. 12.1.a: sistemul de axe fix  $O_1x_1y_1z_1$  și sistemul de axe mobil  $Oxyz$  cu originea în punctul  $O$  astfel încât planul cadrului  $A'ABB'$  să coincidă cu planul  $Oxz$  și  $Oy$  dat de regula șurubului drept.

Vectorii  $\bar{r}$ ,  $\bar{r}_0$ ,  $\bar{\omega}$ ,  $\bar{\varepsilon}$  se exprimă prin proiecțiile lor pe axele sistemului mobil  $Oxzy$ , astfel (fig. 12.1.b):

$$\bar{r} = \overline{OM} = x\bar{i}; \quad \bar{r}_0 = \overline{CO} = a \sin \alpha \bar{i} - a \cos \alpha \bar{k} \tag{a}$$

$$\bar{\omega} = \omega \cos \alpha \cdot \bar{i} + \omega \sin \alpha \cdot \bar{k}; \quad \bar{\varepsilon} = \dot{\bar{\omega}} = 0$$

Expresiile analitice ale vitezei relative și de transport se exprimă față de sistemul mobil  $Oxzy$  astfel (fig. 12.1.b):

$$\bar{v}_r = \frac{\partial \bar{r}}{\partial t} = \dot{x}\bar{i} \tag{b}$$

$$\begin{aligned} \bar{v}_t = \bar{v}_0 + \bar{\omega} \times \bar{r} = \dot{\bar{r}}_0 + \bar{\omega} \times \bar{r} = \bar{\omega} \times \bar{r}_0 + \bar{\omega} \times \bar{r} = \omega (\cos \alpha \cdot \bar{i} + \sin \alpha \cdot \bar{k}) \times a (\sin \alpha \cdot \bar{i} - \cos \alpha \cdot \bar{k}) + \\ + \omega (\cos \alpha \cdot \bar{i} + \sin \alpha \cdot \bar{k}) \times (x \cdot \bar{i}) = \omega (a + x \sin \alpha) \bar{j} \end{aligned} \tag{c}$$

Viteza de transport se poate scrie direct ea având același sens cu axa Oy și fiind proporțională cu distanța până la axa de rotație:  $d = MM' = a + x \sin \alpha$ .

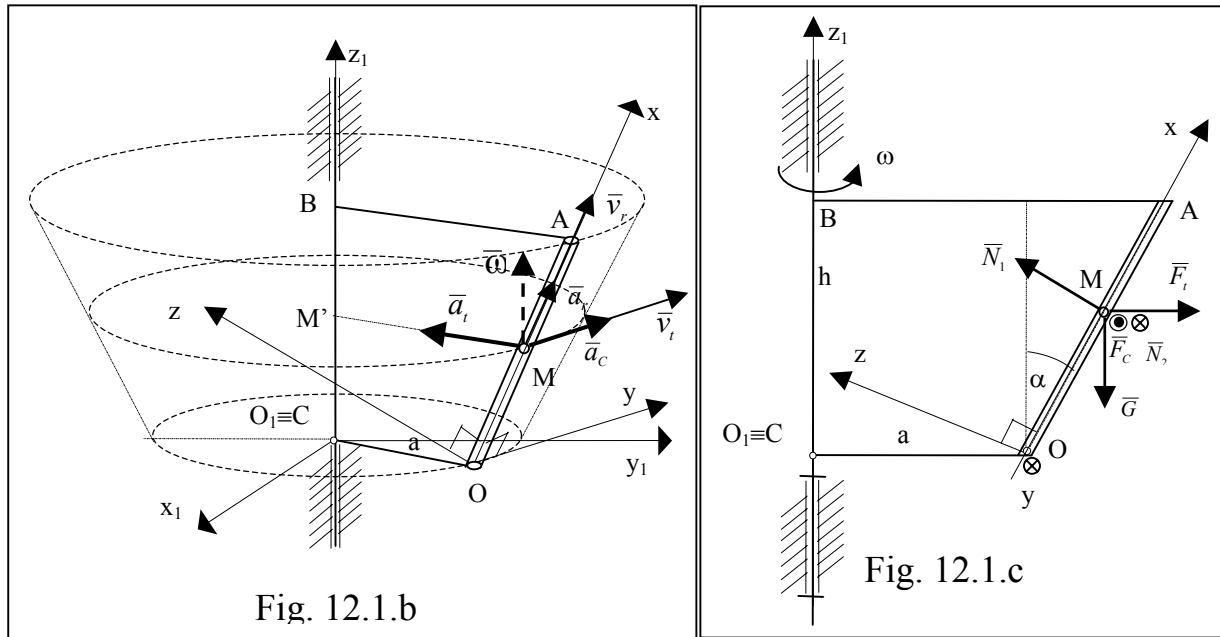
Expresiile analitice ale accelerației relativă, de transport și Coriolis față de sistemul mobil Oxzy (fig. 12.1.b) sunt:

$$\bar{a}_r = \frac{\partial^2 \bar{r}}{\partial t^2} = \ddot{x} \bar{i},$$

$$\bar{a}_t = \bar{a}_0 + \bar{\varepsilon} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}) = \omega (\cos \alpha \cdot \bar{i} + \sin \alpha \cdot \bar{k}) \times (\omega a \cdot \bar{j}) + \quad (d)$$

$$+ \omega (\cos \alpha \cdot \bar{i} + \sin \alpha \cdot \bar{k}) \times (x \sin \alpha \bar{j}) \Rightarrow \bar{a}_t = \omega^2 (x + a \sin \alpha) (\cos \alpha \cdot \bar{k} - \sin \alpha \cdot \bar{i})$$

$$\bar{a}_c = 2\bar{\omega} \times \bar{v}_r = 2(\omega \cos \alpha \cdot \bar{i} + \omega \sin \alpha \cdot \bar{k}) \times (\dot{x} \bar{i}) = 2\omega \dot{x} \sin \alpha \cdot \bar{j}$$



Ecuția fundamentală a dinamicii mișcării relative a punctului material se scrie:

$$m\bar{a}_r = \bar{F} + \bar{F}_t + \bar{F}_c, \quad (e)$$

unde  $\bar{F}$  reprezintă rezultanta forțelor efectiv aplicate și de legătură,  $\bar{F}_t$  forța complementară de transport și  $\bar{F}_c$  forța complementară Coriolis. Conform fig. 12.1.c expresiile analitice ale acestor forțe în proiecții pe axele sistemului mobil Oxzy, sunt:

$$\bar{F} = m\bar{g} + \bar{N}_1 + \bar{N}_2 = -mg \cos \alpha \cdot \bar{i} - mg \sin \alpha \cdot \bar{k} + N_1 \bar{k} + N_2 \bar{j}$$

$$\bar{F}_t = -m\bar{a}_t = m\omega^2 (a + x \sin \alpha) \cdot (\sin \alpha \bar{i} - \cos \alpha \cdot \bar{k}) \quad (f)$$

$$\bar{F}_c = -m\bar{a}_c = -2m\omega \dot{x} \sin \alpha \cdot \bar{j}$$

Ecuția fundamentală a dinamicii mișcării relative (e) se scrie astfel:

$$m\ddot{x} \bar{i} = (-mg \cos \alpha + m\omega^2 x \sin^2 \alpha) \bar{i} + (N_2 - 2m\omega \dot{x} \sin \alpha) \bar{j} + \quad (f)$$

$$+(N_1 - mg \sin \alpha - m\omega^2 x \sin \alpha \cos \alpha) \bar{k}$$

sau în proiecții pe axe, sistemul de ecuații scalare:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = m\omega^2(a + x \sin \alpha) \sin \alpha - mg \cos \alpha \\ 0 = N_2 - 2m\omega \dot{x} \sin \alpha \\ 0 = N_1 - mg \sin \alpha - m\omega^2(a + x \sin \alpha) \cos \alpha \end{cases} \quad (g)$$

Prima ecuație a sistemului (g) reprezintă o ecuație diferențială de ordinul II neomogenă, care se scrie astfel:

$$\ddot{x} - \omega^2 \sin^2 \alpha \cdot x = -g \cos \alpha + a \omega^2 \sin \alpha \quad (h)$$

Soluția generală a acestei ecuații este egală cu suma dintre soluția generală a ecuației omogene ( $x_{om}$ ) și o soluție particulară a ecuației neomogene ( $x_p$ ):

$$x = x_{om} + x_p = C_1 e^{\omega t \sin \alpha} + C_2 e^{-\omega t \sin \alpha} + \frac{a \omega^2 \sin \alpha - g \cdot \cos \alpha}{\omega^2 \sin^2 \alpha} \quad (i)$$

Derivata soluției generale se scrie:

$$\dot{x} = \omega \sin \alpha \cdot (C_1 e^{\omega t \sin \alpha} - C_2 e^{-\omega t \sin \alpha}) \quad (j)$$

unde  $C_1$  și  $C_2$  sunt constante de integrare care se determină din condițiile inițiale ale problemei: pentru  $t=0 \Rightarrow x(0)=0$ , și  $\dot{x}(0)=0$ .

Se obține astfel următorul sistem de două ecuații cu două necunoscute  $C_1$  și  $C_2$ :

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = \frac{g \cos \alpha - a \omega^2 \sin \alpha}{\omega^2 \sin^2 \alpha} \\ C_1 - C_2 = 0 \end{cases} \quad (k)$$

$$\text{Dacă se notează: } \frac{g \cos \alpha - a \omega^2 \sin \alpha}{\omega^2 \sin^2 \alpha} = x_0 \quad (l)$$

se obține:  $C_1 = C_2 = \frac{x_0}{2}$ , deci ecuația mișcării se scrie: (m)

$$x = \frac{x_0}{2} (e^{\omega t \sin \alpha} + e^{-\omega t \sin \alpha} - 2) = x_0 \cdot [ch(\omega t \sin \alpha) - 1] \quad (n)$$

$$v = \dot{x} = \frac{x_0}{2} \omega \sin \alpha (e^{\omega t \sin \alpha} - e^{-\omega t \sin \alpha}) = x_0 \omega \sin \alpha \cdot sh(\omega t \sin \alpha)$$

Se poate exprima legea de mișcare și sub forma relației între viteză și deplasare ținând seama de relația matematică:  $ch^2 x - sh^2 x = 1$ .

Relațiile (n) se mai scriu astfel:

$$\frac{x}{x_0} + 1 = ch(\omega t \sin \alpha) \quad (o)$$

$$\frac{v}{x_0 \omega \sin \alpha} = sh(\omega t \sin \alpha)$$

Legea de mișcare sub forma relației între viteză și deplasare este deci:

$$\left( \frac{x}{x_0} + 1 \right)^2 - \left( \frac{v}{x_0 \omega \sin \alpha} \right)^2 = 1 \quad (p)$$

2. Înlocuind soluțiile (n) în a doua și a treia ecuație (f) rezultă reacțiunile  $N_1$  și  $N_2$  care sunt egale în modul cu forțele de presiune pe care le exercită punctul M asupra pereților tubului după Oy și Oz:

$$N_1 = mg \sin \alpha + m\omega^2 (a + \sin \alpha x_0 [ch(\omega t \sin \alpha) - 1]) \cos \alpha \quad (q)$$

$$N_2 = 2m\omega \dot{x} \sin \alpha = 2m\omega^2 \sin^2 \alpha x_0 sh(\omega t \sin \alpha)$$

Ținând seama că cele două reacțiuni sunt perpendiculare, forța totală de presiune  $N$  pe care o exercită punctul M asupra tubului este:

$$N = \sqrt{N_1^2 + N_2^2} \quad (r)$$

4. Condiția de repaus relativ este dată de:

$$a_r = \ddot{x} = 0 \quad \text{și} \quad v_r = \dot{x} = 0, \quad (s)$$

care introduse în ecuațiile (g) conduc la:

$$\begin{cases} 0 = \omega^2 (a + x \sin \alpha) \sin \alpha - g \cos \alpha \\ N_2 = 0 \\ N_1 = mg \sin \alpha + m\omega^2 a \cos \alpha \end{cases} \quad (t)$$

Din prima ecuație rezultă poziția de repaus relativ a punctului față de tub:

$$x_R = \frac{g \cos \alpha - a\omega^2 \sin \alpha}{\omega^2 \sin^2 \alpha} \quad (u)$$

repaus relativ care se realizează dacă este îndeplinită condiția:

$$g \cos \alpha - a\omega^2 \sin \alpha > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \text{tg} \alpha < \frac{g}{a\omega^2} \quad \text{sau} \quad \omega^2 < \frac{g}{a} \text{ctg} \alpha \quad (v)$$

**12.2. Se consideră cadrul OABC din figura 12.2.a format dintr-un tub OA înclinat cu unghiul  $\alpha$  față de axa de rotație, situat în plan vertical, care se rotește în jurul axei verticale BC cu viteza unghiulară  $\omega = \text{constant}$ . În același timp, în interiorul tubului se deplasează fără frecare un punct material M (o bilă) de masă m, care este prins prin intermediul unui arc de constantă elastică c de punctul fix O; punctul material pornește din D (OD=l<sub>0</sub>=lungimea arcului nedeformat) fără viteză inițială. Se mai cunosc lungimile: CO=a; CB=h.**

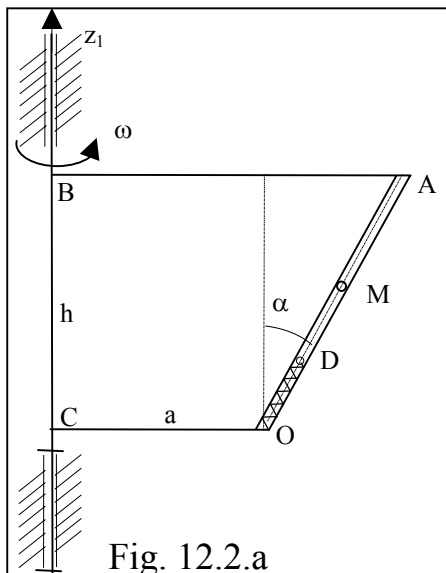


Fig. 12.2.a

**Se cere:**

1. să se deducă ecuațiile mișcării relative a punctului M în interiorul tubului și soluția ecuației diferențiale respective.
2. să se determine forța de presiune pe care o exercită punctul M de masă m asupra pereților tubului.
3. Să se determine distanța OM pentru poziția de repaus relativ al punctului M față de tub

**Rezolvare:**

Față de problema 12.1, în acest caz mai apare o forță ce acționează asupra punctului material (fig. 12.2.c) și anume forța elastică a arcului având mărimea:  $F_e = c(x - \ell_0)$ , unde  $x$  este distanța de la punctul M la punctul O.

Se aleg cele două sisteme de axe ca în fig. 12.2.a: *triedrul fix*  $O_1x_1y_1z_1$  și *triedrul mobil*  $Oxyz$  cu originea în punctul O astfel încât planul cadrului  $A'ABB'$  să coincidă cu planul  $Oxz$ .

Vectorii  $\bar{r}, \bar{r}_0, \bar{\omega}, \bar{\varepsilon}$  se exprimă prin proiecțiile lor pe axele triedrului mobil  $Oxzy$ , astfel (fig. 12.2.b):

$$\begin{aligned} \bar{r} &= \overline{OM} = x\bar{i}; & \bar{r}_0 &= \overline{CO} = a \sin \alpha \bar{i} - a \cos \alpha \bar{k} \\ \bar{\omega} &= \omega \cos \alpha \cdot \bar{i} + \omega \sin \alpha \cdot \bar{k}; & \bar{\varepsilon} &= \dot{\bar{\omega}} = 0 \end{aligned} \tag{a}$$

Expresiile analitice ale vitezei relative și de transport se exprimă față de triedrul mobil  $Oxzy$  astfel (fig. 12.1.b):

$$\bar{v}_r = \frac{\partial \bar{r}}{\partial t} = \dot{x}\bar{i} \tag{b}$$

$$\begin{aligned} \bar{v}_t &= \bar{v}_0 + \bar{\omega} \times \bar{r} = \dot{\bar{r}}_0 + \bar{\omega} \times \bar{r} = \bar{\omega} \times \bar{r}_0 + \bar{\omega} \times \bar{r} = \omega (\cos \alpha \cdot \bar{i} + \sin \alpha \cdot \bar{k}) \times a (\sin \alpha \cdot \bar{i} - \cos \alpha \cdot \bar{k}) + \\ &+ \omega (\cos \alpha \cdot \bar{i} + \sin \alpha \cdot \bar{k}) \times (x \cdot \bar{i}) = \omega (a + x \sin \alpha) \bar{j} \end{aligned} \tag{c}$$

Expresiile analitice ale accelerațiilor relativă, de transport și Coriolis în triedrul mobil  $Oxzy$  (fig. 12.1.b) sunt:

$$\bar{a}_r = \frac{\partial^2 \bar{r}}{\partial t^2} = \ddot{x}\bar{i},$$

$$\begin{aligned} \bar{a}_t &= \bar{a}_0 + \bar{\varepsilon} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}) = \omega (\cos \alpha \cdot \bar{i} + \sin \alpha \cdot \bar{k}) \times (\omega a \cdot \bar{j}) + \\ &+ \omega (\cos \alpha \cdot \bar{i} + \sin \alpha \cdot \bar{k}) \times (x \sin \alpha \cdot \bar{j}) \Rightarrow \bar{a}_t = \omega^2 (x + a \sin \alpha) (\cos \alpha \cdot \bar{k} - \sin \alpha \cdot \bar{i}) \end{aligned} \tag{d}$$

$$\bar{a}_c = 2\bar{\omega} \times \bar{v}_r = 2(\omega \cos \alpha \cdot \bar{i} + \omega \sin \alpha \cdot \bar{k}) \times (\dot{x}\bar{i}) = 2\omega \dot{x} \sin \alpha \cdot \bar{j}$$

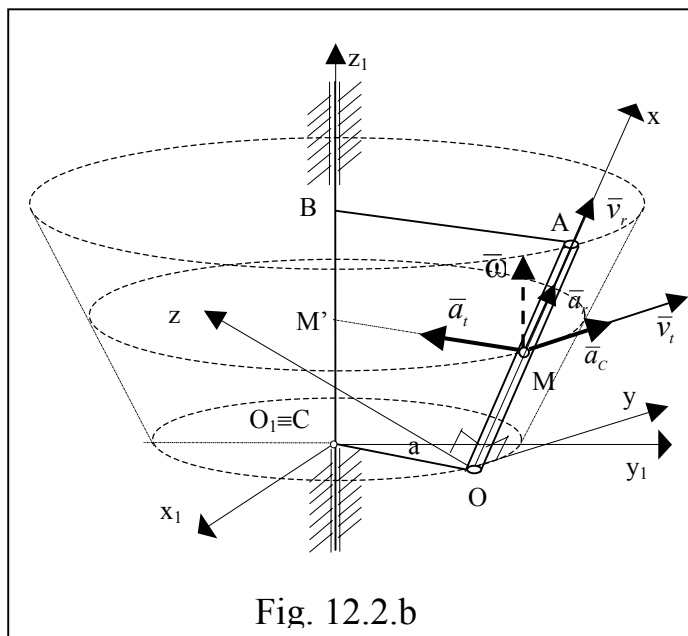


Fig. 12.2.b

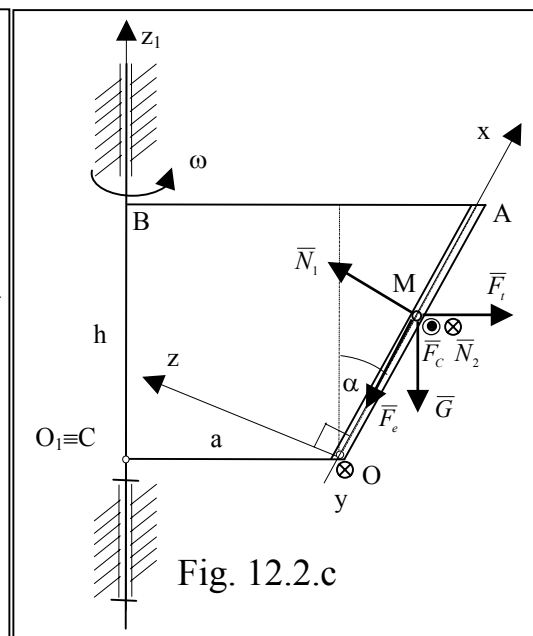


Fig. 12.2.c

Ecuția fundamentală a dinamicii mișcării relative a punctului material este:

$$m\bar{a}_r = \bar{F} + \bar{F}_t + \bar{F}_c, \quad (e)$$

unde  $\bar{F}$  reprezintă rezultanta forțelor efectiv aplicate și de legătură,  $\bar{F}_t$  forța complementară de transport și  $\bar{F}_c$  forța complementară Coriolis. Conform fig. 12.1.c expresiile analitice ale acestor forțe în proiecții pe axele sistemului mobil Oxzy, sunt:

$$\begin{aligned} \bar{F} &= m\bar{g} + \bar{F}_e + \bar{N}_1 + \bar{N}_2 = -mg \cos \alpha \cdot \bar{i} - mg \sin \alpha \cdot \bar{k} - c(x - \ell_0)\bar{i} + N_1\bar{k} + N_2\bar{j} \\ \bar{F}_t &= -m\bar{a}_t = m\omega^2(a + x \sin \alpha)(\sin \alpha \bar{i} - \cos \alpha \cdot \bar{k}) \end{aligned} \quad (f)$$

$$\bar{F}_c = -m\bar{a}_c = -2m\omega \dot{x} \sin \alpha \cdot \bar{j}$$

Ecuția fundamentală a dinamicii mișcării relative (e) se scrie astfel:

$$\begin{aligned} m\ddot{x}\bar{i} &= [-mg \cos \alpha + m\omega^2 x \sin^2 \alpha - c(x - \ell_0)]\bar{i} + (N_2 - 2m\omega \dot{x} \sin \alpha)\bar{j} + \\ &+ (N_1 - mg \sin \alpha - m\omega^2 x \sin \alpha \cos \alpha)\bar{k} \end{aligned} \quad (f)$$

sau în proiecții pe axe, sistemul de ecuații scalare:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = m\omega^2(a + x \sin \alpha) \sin \alpha - mg \cos \alpha - c(x - \ell_0) \\ 0 = N_2 - 2m\omega \dot{x} \sin \alpha \\ 0 = N_1 - mg \sin \alpha - m\omega^2(a + x \sin \alpha) \cos \alpha \end{cases} \quad (g)$$

Prima ecuație a sistemului (g) reprezintă o ecuație diferențială de ordinul II neomogenă, care se scrie astfel:

$$\ddot{x} - \left( \omega^2 \sin^2 \alpha - \frac{c}{m} \right) x = -g \cos \alpha + \frac{c\ell_0}{m} + a \omega^2 \sin \alpha \quad (h)$$

Soluția generală a acestei ecuații este egală cu suma dintre soluția generală a ecuației omogene ( $x_{om}$ ) și o soluție particulară a ecuației neomogene ( $x_p$ ):

$$x = x_{om} + x_p \quad (i)$$

Se consideră cele două ipoteze posibile:

a) Dacă:  $\omega^2 \sin^2 \alpha - \frac{c}{m} < 0$ , notam  $\omega^2 \sin^2 \alpha - \frac{c}{m} = -\lambda^2$  (j)

Soluția generală a ecuației omogene ( $x_{om}$ ) se scrie sub forma:

$$x_{om} = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}, \quad (k)$$

unde  $r_1$  și  $r_2$  sun rădăcinile ecuației caracteristice:

$$r^2 + \lambda^2 = 0, \quad \text{adică} \quad r_{1,2} = \pm i\lambda, \quad \text{deci (k) devine:}$$

$$x_{om} = C_1 e^{i\lambda t} + C_2 e^{-i\lambda t} = A_1 \cos \lambda t + A_2 \sin \lambda t$$

Soluția particulară a ecuației neomogene se găsește de forma:

$$x_p = \frac{-g \cdot \cos \alpha + c \frac{\ell_0}{m} + \omega^2 a \sin \alpha}{\frac{c}{m} - \omega^2 \sin^2 \alpha} \quad (l)$$

Deci soluția generală se scrie:



$$x = A_1 \cos \lambda t + A_2 \sin \lambda t + \frac{-g \cdot \cos \alpha + c \frac{\ell_0}{m} + \omega^2 a \sin \alpha}{\frac{c}{m} - \omega^2 \sin^2 \alpha} \quad (\text{m})$$

iar derivata ei se scrie:

$$\dot{x} = -A_1 \lambda \sin \lambda t + A_2 \lambda \cos \lambda t \quad (\text{n})$$

unde  $A_1$  și  $A_2$  sunt constante de integrare care se determină din condițiile inițiale ale problemei: pentru  $t=0 \Rightarrow x(0) = \ell_0$ , și  $\dot{x}(0) = 0$ .

Se obțin astfel pentru  $A_1$  și  $A_2$  valorile:

$$\begin{cases} A_1 = \ell_0 - \frac{-g \cdot \cos \alpha + c \frac{\ell_0}{m} + \omega^2 a \sin \alpha}{\frac{c}{m} - \omega^2 \sin^2 \alpha} = x_0 \\ A_2 = 0 \end{cases} \quad (\text{o})$$

deci ecuația (m) a mișcării se scrie:

$$x = \ell_0 + x_0 (\cos \lambda t - 1) \quad (\text{p})$$

$$v = \dot{x} = -\lambda x_0 \sin \lambda t$$

Înlocuind soluțiile (n) în a doua și a treia ecuație (f) rezultă reacțiunile  $N_1$  și  $N_2$  care sunt egale în modul cu forțele de presiune pe care le exercită punctul M asupra pereților tubului după Oy și Oz. Ținând seama că cele două reacțiuni sunt perpendiculare, forța totală de presiune  $N$  pe care o exercită punctul M asupra tubului este:

$$N = \sqrt{N_1^2 + N_2^2}$$

b) Dacă  $\omega^2 \sin^2 \alpha - \frac{c}{m} > 0$ , notam  $\omega^2 \sin^2 \alpha - \frac{c}{m} = \beta^2$  (q)

Soluția generală a ecuației omogene ( $x_{om}$ ) se scrie sub forma:

$$x_{om} = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}, \quad (\text{r})$$

unde  $r_1$  și  $r_2$  sunt rădăcinile ecuației caracteristice:

$$r^2 - \beta^2 = 0,$$

adică  $r_{1,2} = \pm \beta$ , deci (r) devine:

$$x_{om} = C_1 e^{\beta t} + C_2 e^{-\beta t}$$

Soluția particulară a ecuației neomogene se găsește de forma:

$$x_p = \frac{-g \cdot \cos \alpha + c \frac{\ell_0}{m} + \omega^2 a \sin \alpha}{\omega^2 \sin^2 \alpha - \frac{c}{m}} \quad (\text{s})$$

Deci soluția generală se scrie:

$$x = C_1 e^{\beta t} + C_2 e^{-\beta t} + \frac{-g \cdot \cos \alpha + c \frac{\ell_0}{m} + \omega^2 a \sin \alpha}{\omega^2 \sin^2 \alpha - \frac{c}{m}} \quad (t)$$

iar derivata ei se scrie:

$$\dot{x} = C_1 \beta e^{\beta t} - C_2 \beta e^{-\beta t} \quad (u)$$

unde  $C_1$  și  $C_2$  sunt constante de integrare care se determină din condițiile inițiale ale problemei: pentru  $t=0 \Rightarrow x(0) = \ell_0$ , și  $\dot{x}(0) = 0$ .

Se obține astfel următorul sistem de două ecuații cu două necunoscute  $C_1$  și  $C_2$ :

$$\begin{cases} C_1 + C_2 + \frac{-g \cdot \cos \alpha + c \frac{\ell_0}{m} + \omega^2 a \sin \alpha}{\omega^2 \sin^2 \alpha - \frac{c}{m}} = \ell_0 \\ C_1 - C_2 = 0 \end{cases} \quad (v)$$

$$\text{Dacă se notează: } \ell_0 \frac{-g \cdot \cos \alpha + c \frac{\ell_0}{m} + \omega^2 a \sin \alpha}{\omega^2 \sin^2 \alpha - \frac{c}{m}} = x_0 \quad (w)$$

se obține:  $C_1 = C_2 = \frac{x_0}{2}$ , deci ecuația mișcării se scrie: (x)

$$x = \frac{x_0}{2} (e^{\beta t} + e^{-\beta t}) + \ell_0 - x_0 = x_0 (ch\beta t - 1) + \ell_0 \quad (y)$$

$$v = \dot{x} = x_0 \beta \cdot sh\beta t$$

Se poate exprima legea de mișcare și sub forma relației între viteză și deplasare ținând seama de relația matematică:  $ch^2 x - sh^2 x = 1$ .

Relațiile (y) se mai scriu astfel:

$$\frac{x - \ell_0}{x_0} + 1 = ch\beta t; \quad \frac{v}{x_0 \beta} = sh\beta t \quad (z)$$

Legea de mișcare sub forma relației între viteză și deplasare este deci:

$$\left( \frac{x - \ell_0}{x_0} + 1 \right)^2 - \left( \frac{v}{x_0 \beta} \right)^2 = 1 \quad (aa)$$

2. Înlocuind soluțiile (n) în a doua și a treia ecuație (y) rezultă reacțiunile  $N_1$  și  $N_2$  care sunt egale în modul cu forțele de presiune pe care le exercită punctul M asupra pereților tubului după Oy și Oz: Ținând seama că cele două reacțiuni sunt perpendiculare, forța totală de presiune  $N$  pe care o exercită punctul M asupra tubului este:

$$N = \sqrt{N_1^2 + N_2^2} \quad (r)$$

3. Condițiile de repaus relativ sunt date de:

$$a_r = \ddot{x} = 0 \quad \text{și} \quad v_r = \dot{x} = 0, \tag{ab}$$

care introduse în ecuațiile (g) conduc la:

$$x_R = (OM)_R = \frac{-mg \cos \alpha + c \ell_0 + m \omega^2 a \sin \alpha}{-m\omega^2 \sin^2 \alpha + c}$$

$$N_2 = 0 \tag{ac}$$

$$N_1 = mg \sin \alpha + m\omega^2 (a + x_R \sin \alpha)$$

Repausul relativ se realizează dacă este îndeplinită condiția:

$$\frac{-mg \cos \alpha + c \ell_0 + m \omega^2 a \sin \alpha}{-m\omega^2 \sin^2 \alpha + c} > \ell_0 \tag{ad}$$

**12.3. Se consideră** cadrul  $OABC$  din figura 12.3.a format dintr-un tub  $OA$  înclinat cu unghiul  $\alpha$  față de axa de rotație, situat în plan vertical, care se rotește în jurul axei verticale  $BC$  cu viteza unghiulară  $\omega = \text{constant}$ . În același timp, în interiorul tubului se deplasează fără frecare un punct material  $M$  (obilă) de masă  $m$ , pornind din punctul  $O$  fără viteză inițială. Tubul este înclinat față de verticală cu unghiul  $\alpha$ . Se mai cunosc lungimile:  $CO = a$ ;  $CB = h$ .

**Se cere:**

1. să se deducă ecuațiile scalare ale mișcării relative a punctului  $M$  în interiorul tubului și legea de mișcare.
2. să se determine forța de presiune pe care o exercită punctul  $M$  de masă  $m$  asupra pereților tubului.
3. Să se determine poziția punctului  $M$  pentru poziția de repaus relativ față de tub.

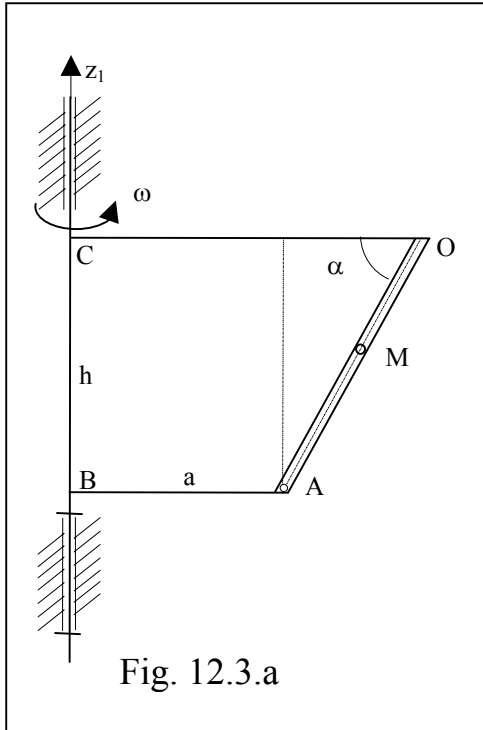


Fig. 12.3.a

**Rezolvare:**

Se alege cele două sisteme de axe ca în fig. 12.3.a: sistemul de axe (triedrul, reperul) fix  $O_1x_1y_1z_1$  și sistemul de axe mobil  $Oxyz$  cu originea în punctul  $O$  astfel încât planul cadrului  $A'B'B'$  să coincidă cu planul  $Oxz$  și  $Oy$  dat de regula șurubului drept.

Pentru studiul mișcării se pleacă de la ecuația fundamentală a dinamicii mișcării relative a punctului material:

$$m\bar{a}_r = \bar{F} + \bar{F}_t + \bar{F}_C, \tag{a}$$

unde conform fig. 12.3.c se poate scrie:

$$\vec{F} = m\vec{g} + \vec{N}_1 + \vec{N}_2 = mg \sin \alpha \cdot \vec{i} + mg \cos \alpha \cdot \vec{k} - N_1 \vec{k} - N_2 \vec{j} \quad (b)$$

rezultanta forțelor efectiv aplicate și de legătură,

$$\vec{F}_t = -m\vec{a}_t \text{ forța complementară de transport} \quad (c)$$

$$\vec{F}_c = -m\vec{a}_c \text{ forța complementară Coriolis.} \quad (d)$$

Accelerațiile de transport și Coriolis față de triedrul mobil Oxzy (fig. 12.3.b) sunt:

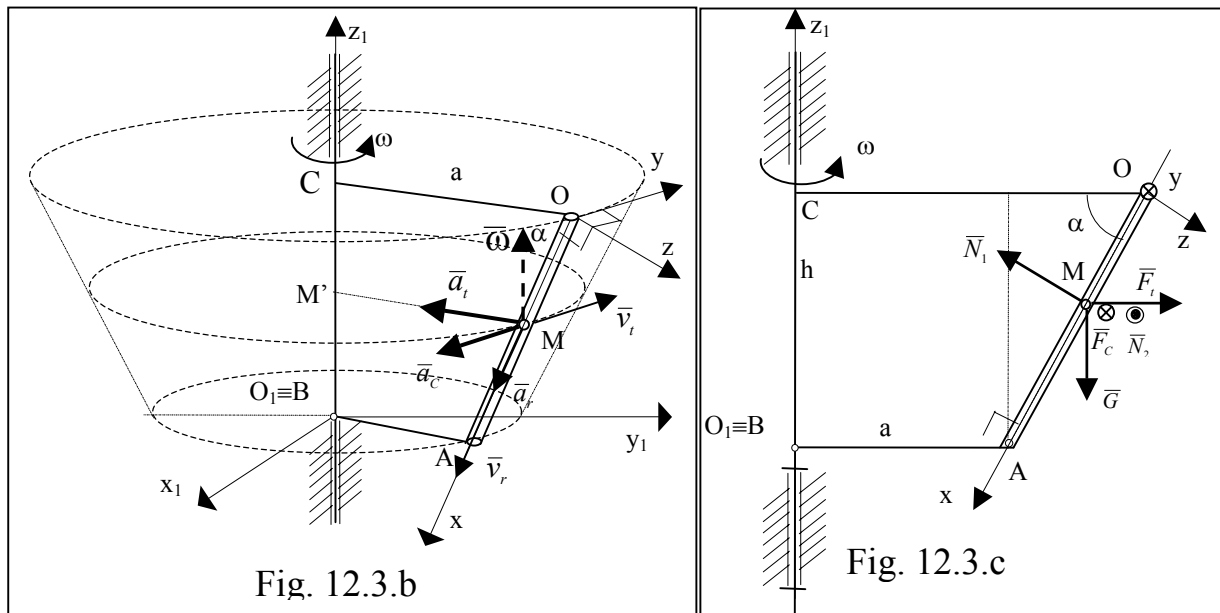
$$\vec{a}_t = \vec{a}_t^v = \omega^2(a - x \cos \alpha)(\cos \alpha \cdot \vec{i} - \sin \alpha \cdot \vec{k}) \quad (d)$$

$$\vec{a}_c = 2\vec{\omega} \times \vec{v}_r = 2(-\omega \sin \alpha \cdot \vec{i} - \omega \cos \alpha \cdot \vec{k}) \times (\dot{x}\vec{i}) = -2\omega \dot{x} \cos \alpha \cdot \vec{j}$$

Rezultă expresiile analitice ale forțelor complementare

$$\vec{F}_t = -m\vec{a}_t = m\omega^2(a - x \cos \alpha)(-\cos \alpha \cdot \vec{i} + \sin \alpha \cdot \vec{k}) \quad (e)$$

$$\vec{F}_c = -m\vec{a}_c = 2m\omega \dot{x} \cos \alpha \cdot \vec{j}$$



Ecuția fundamentală a dinamicii mișcării relative (e) se scrie astfel:

$$m\ddot{x}\vec{i} = mg \sin \alpha \cdot \vec{i} + mg \cos \alpha \cdot \vec{k} - N_1 \vec{k} - N_2 \vec{j} + m\omega^2(a - x \cos \alpha)(-\cos \alpha \cdot \vec{i} + \sin \alpha \cdot \vec{k}) + 2m\omega \dot{x} \cos \alpha \cdot \vec{j} \quad (f)$$

sau în proiecții pe axe, sistemul de ecuații scalare:

$$m\ddot{x} = mg \sin \alpha - m\omega^2(a - x \cos \alpha) \cos \alpha \quad (g)$$

$$0 = -N_2 + 2m\omega \dot{x} \cos \alpha$$

$$0 = -N_1 + mg \cos \alpha + m\omega^2(a - x \cos \alpha) \sin \alpha$$

Prima ecuație a sistemului (g) reprezintă o ecuație diferențială de ordinul II neomogenă, care se scrie astfel:

$$\ddot{x} - \omega^2 \cos^2 \alpha \cdot x = g \sin \alpha - a \omega^2 \cos \alpha \quad (h)$$

Soluția generală a acestei ecuații este egală cu suma dintre soluția generală a ecuației omogene ( $x_{om}$ ) și o soluție particulară a ecuației neomogene ( $x_p$ ):

$$x = x_{om} + x_p = C_1 e^{\omega t \cos \alpha} + C_2 e^{-\omega t \cos \alpha} - \frac{g \cdot \sin \alpha - a \omega^2 \cos \alpha}{\omega^2 \cos^2 \alpha} \quad (i)$$

Derivata soluției generale se scrie:

$$\dot{x} = \omega \cos \alpha (C_1 e^{\omega t \cos \alpha} - C_2 e^{-\omega t \cos \alpha}) \quad (j)$$

unde  $C_1$  și  $C_2$  sunt constante de integrare care se determină din condițiile inițiale ale problemei: pentru  $t=0 \Rightarrow x(0)=0$ , și  $\dot{x}(0)=0$ .

Se obține astfel următorul sistem de două ecuații cu două necunoscute  $C_1$  și  $C_2$ :

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = \frac{g \sin \alpha - a \omega^2 \cos \alpha}{\omega^2 \cos^2 \alpha} \\ C_1 - C_2 = 0 \end{cases} \quad (k)$$

Dacă se notează:  $\frac{g \sin \alpha - a \omega^2 \cos \alpha}{\omega^2 \cos^2 \alpha} = x_0$  (l)

se obține:  $C_1 = C_2 = \frac{x_0}{2}$ , deci ecuația mișcării se scrie: (m)

$$x = \frac{x_0}{2} (e^{\omega t \cos \alpha} + e^{-\omega t \cos \alpha} - 2) = x_0 \cdot [ch(\omega t \cos \alpha) - 1] \quad (n)$$

$$v = \dot{x} = \frac{x_0}{2} \omega \cos \alpha (e^{\omega t \cos \alpha} - e^{-\omega t \cos \alpha}) = x_0 \omega \cos \alpha \cdot sh(\omega t \cos \alpha)$$

Se poate exprima legea de mișcare și sub forma unei ecuații viteză - deplasare ținând seama de relația matematică:  $ch^2 x - sh^2 x = 1$ .

Relațiile (n) se mai scriu astfel:

$$\frac{x}{x_0} + 1 = ch(\omega t \cos \alpha) \quad (o)$$

$$\frac{v}{x_0 \omega \cos \alpha} = sh(\omega t \sin \alpha)$$

Legea de mișcare sub forma relației între viteză și deplasare este deci:

$$\left( \frac{x}{x_0} + 1 \right)^2 - \left( \frac{v}{x_0 \omega \cos \alpha} \right)^2 = 1 \quad (p)$$

2. Înlocuind soluțiile (n) în a doua și a treia ecuație (f) rezultă reacțiunile  $N_1$  și  $N_2$  care sunt egale în modul cu forțele de presiune pe care le exercită punctul M asupra pereților tubului după Oy și Oz:

$$N_1 = mg \cos \alpha + m \omega^2 (a - \cos \alpha x_0 [ch(\omega t \cos \alpha) - 1]) \sin \alpha \quad (q)$$

$$N_2 = 2m \omega \dot{x} \cos \alpha = 2m \omega^2 \cos^2 \alpha x_0 sh(\omega t \cos \alpha)$$

Forța totală de presiune  $N$  pe care o exercită punctul M asupra tubului este:  $N = \sqrt{N_1^2 + N_2^2}$  (r)

4. Condiția de repaus relativ este dată de:

$$a_r = \ddot{x} = 0 \quad \text{și} \quad v_r = \dot{x} = 0, \quad x = x_R \quad (s)$$

care introduse în ecuațiile (g) conduc la:

$$\begin{aligned} 0 &= mg \sin \alpha - m\omega^2(a - x_R \cos \alpha) \cos \alpha \\ 0 &= -N_2 \\ 0 &= -N_1 + mg \cos \alpha + m\omega^2(a - x_R \cos \alpha) \sin \alpha \end{aligned} \quad (t)$$

Din prima ecuație rezultă poziția de repaus relativ a punctului față de tub:

$$x_R = \frac{-g \sin \alpha + a\omega^2 \cos \alpha}{\omega^2 \cos^2 \alpha} \quad (u)$$

repaus relativ care se realizează dacă este îndeplinită condiția:

$$-g \sin \alpha + a\omega^2 \cos \alpha > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{tg} \alpha < \frac{a\omega^2}{g} \quad \text{sau} \quad \omega^2 > \frac{g}{a} \operatorname{tg} \alpha \quad (v)$$

**12.4. Se consideră** cadrul  $ABB'A'$  format dintr-un tub situat în plan vertical de forma semicirculară ca în figura 12.4, care se rotește cu viteza unghiulară constantă  $\omega$ . În același timp, în interiorul tubului se deplasează fără frecare un punct material de masă  $m$ , pornind din punctul  $A$  cu viteză inițială. Se mai cunosc lungimile:  $AA' = a$ ;  $A'B' = h$ .

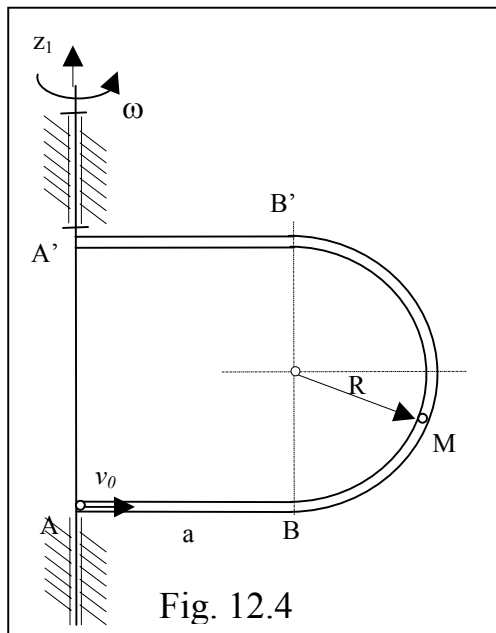


Fig. 12.4

**Se cere:**

1. să se deducă ecuațiile mișcării relative a punctului în interiorul tubului pe cele două porțiuni  $AB$  și  $BB'$
2. să se determine forța pe care o exercită punctul material de masă  $m$  asupra peretelui tubului pe cele două porțiuni.

**Rezolvare:**

**a. Mișcarea pe  $AB$**

Se consideră cele două sisteme de axe ca în fig. 12.4.a: sistemul de axe (triedrul, reperul) fix  $O_1x_1y_1z_1$  și sistemul de axe mobil  $Oxyz$  cu originea în același punct de pe axa de rotație astfel încât planul cadrului  $ABB'A'$  să coincidă cu planul  $Oxz$  și  $Oy$  dat de regula șurubului drept.

Se exprimă vectorii  $\vec{r}$ ,  $\vec{r}_o$ ,  $\vec{\omega}$ ,  $\vec{\varepsilon}$  prin proiecțiile lor față de triedrul mobil  $Oxzy$  astfel (fig. 12.4.a):

$$\bar{r} = \overline{OM} = x\bar{i}; \quad \bar{r}_0 = 0 \tag{a}$$

$$\bar{\omega} = \omega \cdot \bar{k}; \quad \bar{\varepsilon} = \dot{\bar{\omega}} = 0$$

Viteza relativă și de transport se exprimă față de triedrul mobil Oxzy astfel (fig. 12.4.a):

$$\bar{v}_r = \frac{\partial \bar{r}}{\partial t} = \dot{x}\bar{i} \tag{b}$$

$$\bar{v}_t = \bar{v}_0 + \bar{\omega} \times \bar{r} = (\omega \cdot \bar{k}) \times (x \cdot \bar{i}) = \omega \cdot x \bar{j}$$

Accelerațiile relativă, de transport și Coriolis se exprimă față de triedrul mobil Oxzy astfel (fig. 12.4.a):

$$\bar{a}_r = \frac{\partial^2 \bar{r}}{\partial t^2} = \ddot{x}\bar{i},$$

$$\bar{a}_t = \bar{a}_0 + \bar{\varepsilon} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}) = (\omega \cdot \bar{k}) \times (\omega x \cdot \bar{j}) = -\omega^2 x \cdot \bar{i} \tag{c}$$

$$\bar{a}_c = 2\bar{\omega} \times \bar{v}_r = (2\omega \cdot \bar{k}) \times (\dot{x}\bar{i}) = 2\omega \dot{x} \cdot \bar{j}$$

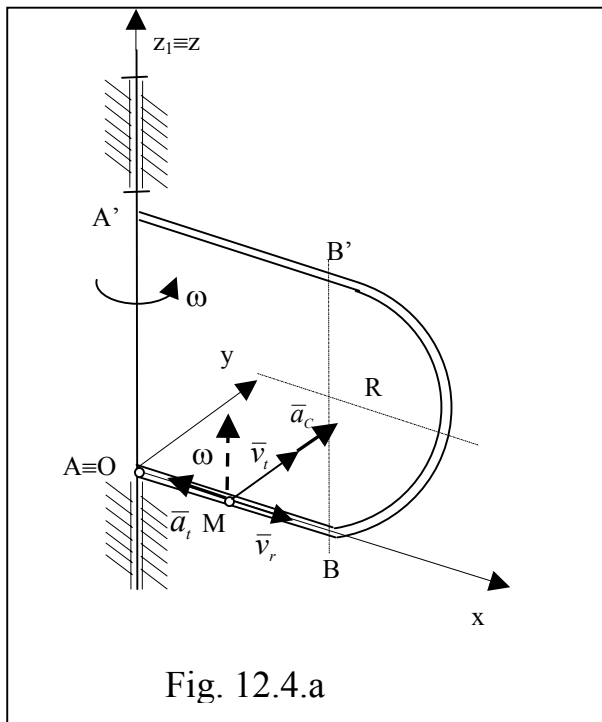


Fig. 12.4.a

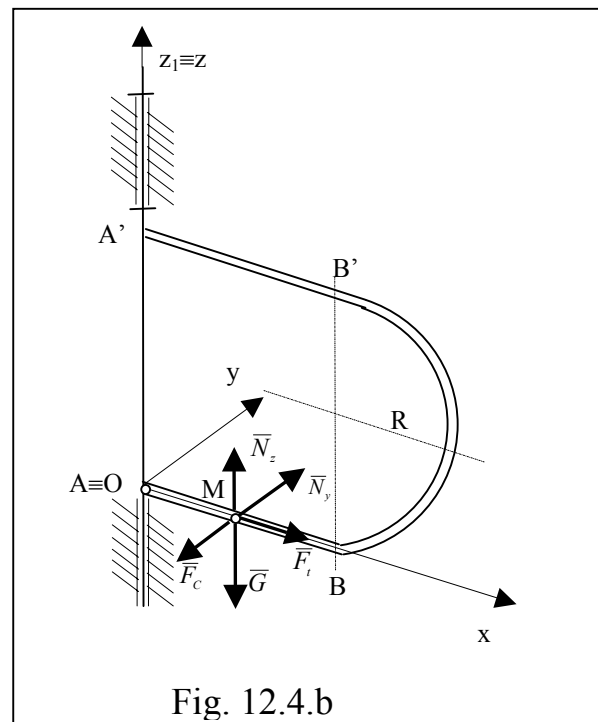


Fig. 12.4.b

Expresiile analitice (în raport cu sistemul de axe mobil Oxzy) ale forțelor exterioare (direct aplicate și de legătură) și a forțelor complementare (de transport și Coriolis) conform fig. 12.3.b sunt

$$\bar{F} = m\bar{g} + \bar{N}_z + \bar{N}_y = -mg \cdot \bar{k} + N_z \bar{k} + N_y \bar{j}$$

$$\bar{F}_t = -m\bar{a}_t = m\omega^2 x \cdot \bar{i} \tag{d}$$

$$\bar{F}_c = -m\bar{a}_c = -2m\omega \dot{x} \cdot \bar{j}$$

Ecuția fundamentală a dinamicii mișcării relative a punctului material:

$$m\bar{a}_r = \bar{F} + \bar{F}_t + \bar{F}_c, \quad \text{se scrie analitic astfel:} \tag{e}$$

$$m\ddot{x}\bar{i} = m\omega^2 x \cdot \bar{i} + (N_y - 2m\omega \dot{x})\bar{j} + (N_z - mg)\bar{k} \tag{f}$$

sau în proiecții pe axele triedrului mobil:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = m\omega^2 x \\ 0 = N_y - 2m\omega\dot{x} \\ 0 = N_z - mg \end{cases} \quad (g)$$

Prima ecuație (g) se mai scrie:  $\ddot{x} - \omega^2 \cdot x = 0$  (h)

și are soluția de forma:  $x = C_1 e^{\omega t} + C_2 e^{-\omega t}$ , (i)

respectiv derivata:  $\dot{x} = \omega(C_1 e^{\omega t} - C_2 e^{-\omega t})$  (j)

unde  $C_1$  și  $C_2$  sunt constante de integrare care se determină din condițiile inițiale ale problemei:  $x(0) = 0$ , și  $\dot{x}(0) = v_0$ . Se obține astfel următorul sistem de două ecuații cu două necunoscute  $C_1$  și  $C_2$ :

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ C_1 - C_2 = \frac{v_0}{\omega} \end{cases} \quad (k)$$

se obține:  $C_1 = -C_2 = \frac{v_0}{2\omega}$ , deci ecuația mișcării se scrie:

$$x = \frac{v_0}{2\omega} (e^{\omega t} - e^{-\omega t}) = \frac{v_0}{\omega} \cdot sh(\omega t) \quad (l)$$

$$\dot{x} = v_0 ch(\omega t)$$

Se poate exprima legea de mișcare și sub forma viteză funcție de spațiu ținând seama de relația matematică evidentă:  $ch^2 x - sh^2 x = 1$ :

$$\left(\frac{\dot{x}}{v_0}\right)^2 - \left(\frac{x\omega}{v_0}\right)^2 = 1 \quad (m)$$

sau sub forma:

$$v(x) = \dot{x} = v_0 \sqrt{\left(\frac{x\omega}{v_0}\right)^2 + 1} \quad (n)$$

În punctul B viteza va fi:  $v_B = v_0 \sqrt{\left(\frac{a\omega}{v_0}\right)^2 + 1}$  (o)

Din ultimele două ecuații (g) rezultă reacțiunile  $N_y$  și  $N_z$ :

$$N_y = 2m\omega\dot{x} = 2m\omega v_0 \sqrt{\left(\frac{a\omega}{v_0}\right)^2 + 1}; \quad N_z = mg \quad (p)$$

**b. Mișcarea pe BB'**

Se consideră cele două sisteme de axe ca în fig. 12.4.c: sistemul de axe (triedrul, reperul) fix  $O_1x_1y_1z_1$  și sistemul de axe mobil  $Oxyz$  cu originea în același punct de pe axa de rotație astfel încât planul cadrului  $ABB'A'$  să coincidă cu planul  $Oxz$  și  $Oy$  dat de regula șurubului drept.



Se exprimă vectorii  $\bar{r}, \bar{r}_0, \bar{\omega}, \bar{\varepsilon}$  prin proiecțiile lor față de triedrul mobil Oxzy astfel (fig. 12.4.a):

$$\bar{r} = \overline{OM} = (a + R \sin \theta) \bar{i} + R(1 - \cos \theta) \bar{k}; \quad \bar{r}_0 = 0 \quad (q)$$

$$\bar{\omega} = \omega \cdot \bar{k}; \quad \bar{\varepsilon} = \dot{\bar{\omega}} = 0$$

Viteza relativă și de transport se exprimă față de triedrul mobil Oxzy astfel (fig. 12.4.a):

$$\bar{v}_r = \frac{\partial \bar{r}}{\partial t} = R \dot{\theta} \cos \theta \bar{i} + R \dot{\theta} \sin \theta \bar{k} = R \dot{\theta} \bar{\tau} \quad (r)$$

$$\bar{v}_t = \bar{v}_0 + \bar{\omega} \times \bar{r} = (\omega \cdot \bar{k}) \times ((a + R \sin \theta) \bar{i} + R(1 - \cos \theta) \bar{k}) = \omega \cdot (a + R \sin \theta) \bar{j}$$

Se observă că viteza de transport este în același sens cu axa Oy, fiind proporțională cu distanța până la axa de rotație:  $d = MM' = a + R \sin \theta$ .

Accelerațiile relativă, de transport și Coriolis se exprimă față de triedrul mobil Oxzy astfel (fig. 12.4.a):

$$\bar{a}_r = \frac{\partial^2 \bar{r}}{\partial t^2} = (R \ddot{\theta} \cos \theta - R \dot{\theta}^2 \sin \theta) \bar{i} + (R \ddot{\theta} \sin \theta + R \dot{\theta}^2 \cos \theta) \bar{k}$$

$$\bar{a}_t = \bar{a}_0 + \bar{\varepsilon} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}) = (\omega \cdot \bar{k}) \times [\omega \cdot (a + R \sin \theta) \bar{j}] = -\omega^2 (a + R \sin \theta) \cdot \bar{i} \quad (s)$$

$$\bar{a}_c = 2 \bar{\omega} \times \bar{v}_r = (2 \omega \cdot \bar{k}) \times (R \dot{\theta} \cos \theta \bar{i} + R \dot{\theta} \sin \theta \bar{k}) = 2 \omega R \dot{\theta} \cos \theta \cdot \bar{j}$$

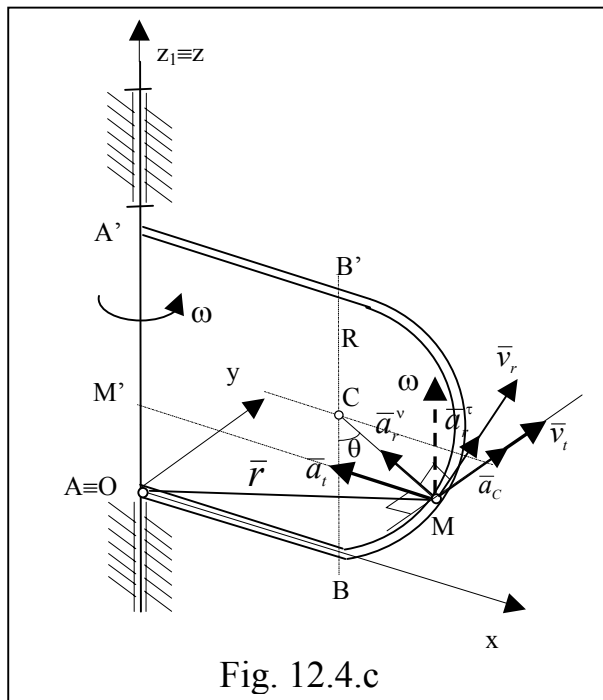


Fig. 12.4.c

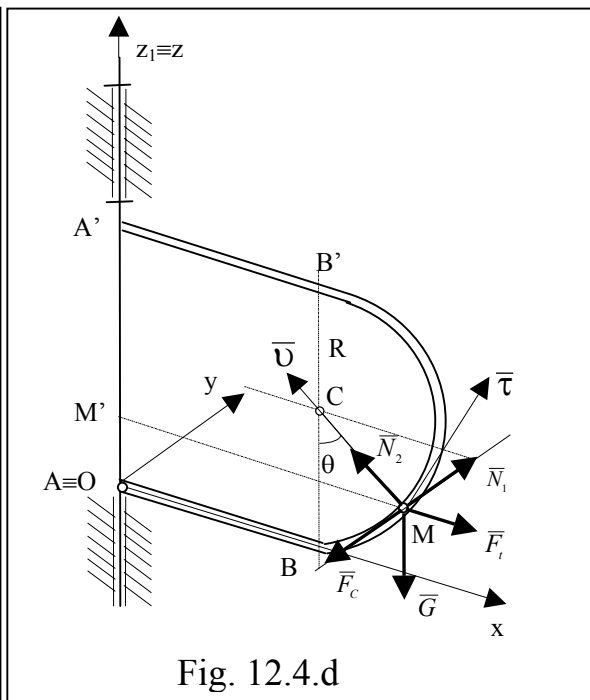


Fig. 12.4.d

Expresiile analitice (în raport cu sistemul de axe mobil Oxzy) ale forțelor exterioare (direct aplicate și de legătură) și a forțelor complementare (de transport și Coriolis) conform fig. 12.4.d sunt

$$\begin{aligned} \bar{F} &= m \bar{g} + \bar{N}_1 + \bar{N}_2 = -mg \cdot \bar{k} - N_1 \sin \theta \cdot \bar{i} + N_1 \cos \theta \cdot \bar{k} + N_2 \bar{j} \\ \bar{F}_t &= -m \bar{a}_t = m \omega^2 (a + R \sin \theta) \cdot \bar{i} \\ \bar{F}_c &= -m \bar{a}_c = -2m \omega R \dot{\theta} \cos \theta \cdot \bar{j} \end{aligned} \quad (t)$$

Ecuția fundamentală a dinamicii mișcării relative a punctului material:

$$m\bar{a}_r = \bar{F} + \bar{F}_t + \bar{F}_c, \quad (\text{u})$$

se scrie analitic astfel:

$$m(R\ddot{\theta} \cos \theta - R\dot{\theta}^2 \sin \theta) \bar{i} + m(R\ddot{\theta} \sin \theta + R\dot{\theta}^2 \cos \theta) \cdot \bar{k} = -mg \cdot \bar{k} - N_1 \sin \theta \cdot \bar{i} + N_1 \cos \theta \bar{k} + N_2 \bar{j} + m\omega^2(a + R \sin \theta) \cdot \bar{i} - 2m\omega R\dot{\theta} \cos \theta \cdot \bar{j} \quad (\text{w})$$

sau în proiecții pe axele triedrului mobil:

$$\begin{cases} m(R\ddot{\theta} \cos \theta - R\dot{\theta}^2 \sin \theta) = -N_1 \sin \theta + m\omega^2(a + R \sin \theta) \\ 0 = N_2 - 2m\omega R\dot{\theta} \cos \theta \\ m(R\ddot{\theta} \sin \theta + R\dot{\theta}^2 \cos \theta) = -mg + N_1 \cos \theta \end{cases} \quad (\text{x})$$

Dacă se multiplică prima ecuație (x) cu  $\cos \theta$  și a treia cu  $\sin \theta$  și se adună membru cu membru se obține ecuația diferențială:

$$mR\ddot{\theta}(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = m\omega^2(a + R \sin \theta) \cos \theta - mg \sin \theta, \quad \text{sau} \quad (\text{y})$$

$$R\ddot{\theta} = \omega^2(a + R \sin \theta) \cos \theta - g \sin \theta$$

Multiplicând ecuația (y) cu:  $d\theta = \dot{\theta} dt$  și integrând se obține o primă formă integrală a soluției:

$$R\dot{\theta} \cdot \dot{\theta} dt = \omega^2(a + R \sin \theta) \cos \theta \cdot d\theta - g \sin \theta d\theta \quad (\text{z})$$

$$\frac{R\dot{\theta}^2}{2} = \omega^2 a \sin \theta - \frac{1}{4} \omega^2 R \cos 2\theta + g \cos \theta + C$$

Constanta de integrare se obține din condițiile inițiale:

$$\theta = 0 \Rightarrow v_B = R\dot{\theta} = v_0 \sqrt{\left(\frac{a\omega}{v_0}\right)^2 + 1} \quad (\text{aa})$$

Se obține astfel legea de mișcare sub forma:

$$v(\theta) = R\dot{\theta} = \sqrt{v_B^2 + 2R\omega^2 a \sin \theta + \omega^2 R^2 \sin^2 \theta - 2Rg(1 - \cos \theta)} \quad (\text{ab})$$

Viteza în punctul B' se obține din relația (ab) în care  $\theta = 180^\circ$ :

$$v_{B'} = \sqrt{v_B^2 - 4Rg} \quad (\text{ac})$$

Pentru ca punctul să ajungă în B' trebuie îndeplinită condiția:

$$v_B^2 \geq 4Rg \quad \text{sau} \quad (a\omega)^2 + v_0^2 \geq 4Rg \quad (\text{ad})$$

$$\text{sau} : v_0 \geq \sqrt{4Rg - (a\omega)^2}$$

**12.5.** *Se consideră cadrul  $A'ABB'$  din figura 12.5 format dintr-un tub  $AB$  înclinat cu unghiul  $\alpha$  față de axa de rotație, situat în plan vertical, care se rotește cu viteza unghiulară constantă  $\omega$ . În același timp, în interiorul tubului se deplasează fără frecare un punct material de masă  $m$ , pornind din punctul  $A$  fără viteză inițială. Se mai cunosc lungimile:  $AA' = a$ ;  $A'B' = h$ .*

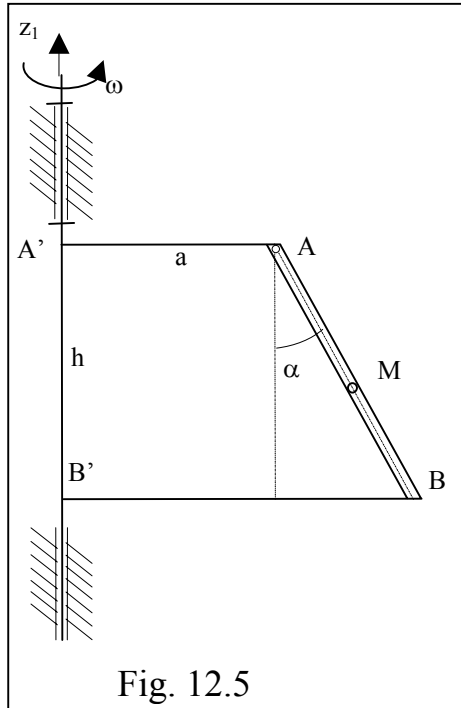


Fig. 12.5

**Se cere:**

1. să se deducă ecuațiile mișcării relative a punctului în interiorul tubului
2. să se determine viteza absolută în momentul părăsirii tubului (în punctul B);
3. să se determine forța pe care o exercită punctul material de masă  $m$  asupra peretelui tubului.

**Rezolvare:**

Se consideră cele două sisteme de axe ca în fig. 12.5.a: *sistemul de axe (triedrul, reperul) fix  $O_1x_1y_1z_1$  și sistemul de axe mobil  $Oxyz$  cu originea în același punct de pe axa de rotație astfel încât planul cadrului  $A'ABB'$  să coincidă cu planul  $Oxz$  și  $Oy$  dat de regula șurubului drept.*

Se exprimă vectorii  $\bar{r}$ ,  $\bar{r}_0$ ,  $\bar{\omega}$ ,  $\bar{\varepsilon}$  prin proiecțiile lor față de triedrul mobil  $Oxzy$  astfel (fig. 12.5.a):

$$\begin{aligned} \bar{r} &= \overline{OM} = x\bar{i}; & \bar{r}_0 &= 0 \\ \bar{\omega} &= -\omega \cos \alpha \cdot \bar{i} + \omega \sin \alpha \cdot \bar{k}; & \bar{\varepsilon} &= \dot{\bar{\omega}} = 0 \end{aligned} \tag{a}$$

Viteza relativă și de transport se exprimă față de triedrul mobil  $Oxzy$  astfel (fig. 12.5.a):

$$\bar{v}_r = \frac{\partial \bar{r}}{\partial t} = \dot{x}\bar{i} \tag{b}$$

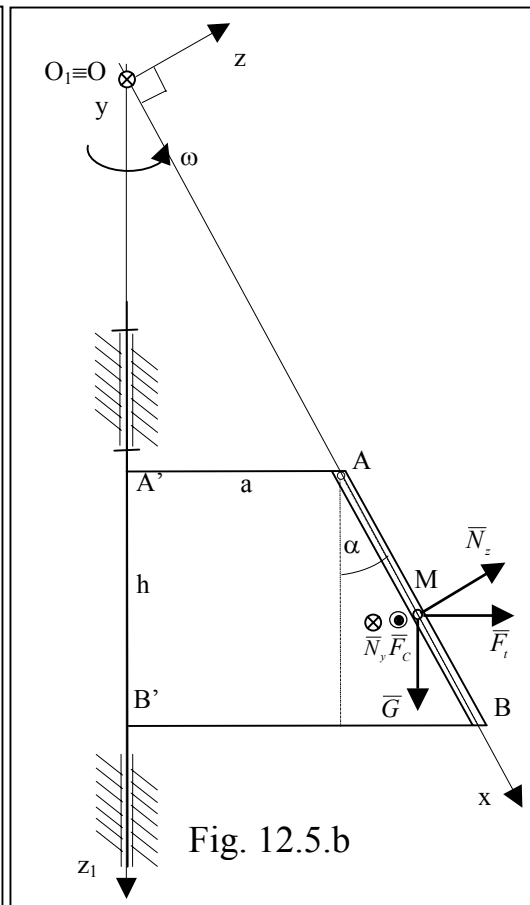
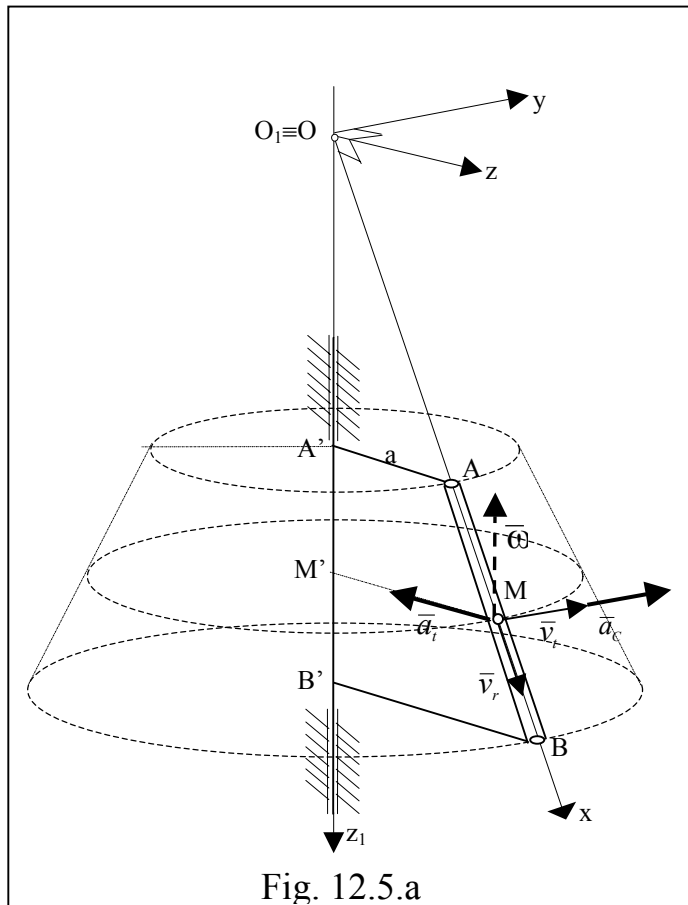
$$\bar{v}_t = \bar{v}_0 + \bar{\omega} \times \bar{r} = (-\omega \cos \alpha \cdot \bar{i} + \omega \sin \alpha \cdot \bar{k}) \times (x \cdot \bar{i}) = \omega \cdot x \sin \alpha \cdot \bar{j}$$

Accelerațiile relativă, de transport și Coriolis se exprimă față de triedrul mobil  $Oxzy$  astfel (fig. 12.5.a):

$$\begin{aligned} \bar{a}_r &= \frac{\partial^2 \bar{r}}{\partial t^2} = \ddot{x}\bar{i}, \\ \bar{a}_t &= \bar{a}_0 + \bar{\varepsilon} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}) = (-\omega \cos \alpha \cdot \bar{i} + \omega \sin \alpha \cdot \bar{k}) \times (\omega x \sin \alpha \cdot \bar{j}) \end{aligned} \tag{c}$$

$$\Rightarrow \bar{a}_t = -\omega^2 x \sin^2 \alpha \cdot \bar{i} - \omega^2 x \sin \alpha \cos \alpha \cdot \bar{k}$$

$$\bar{a}_c = 2\bar{\omega} \times \bar{v}_r = 2(-\omega \cos \alpha \cdot \bar{i} + \omega \sin \alpha \cdot \bar{k}) \times (\dot{x}\bar{i}) = 2\omega \dot{x} \sin \alpha \cdot \bar{j}$$



Expresiile analitice (în raport cu sistemul de axe mobil Oxzy) ale forțelor exterioare (direct aplicate și de legătură) și a forțelor complementare (de transport și Coriolis) conform fig. 12.5.b sunt

$$\begin{aligned} \vec{F} &= m\vec{g} + \vec{N}_z + \vec{N}_y = mg \cos \alpha \cdot \vec{i} - mg \sin \alpha \cdot \vec{k} + N_z \vec{k} + N_y \vec{j} \\ \vec{F}_t &= -m\vec{a}_t = m\omega^2 x \sin^2 \alpha \cdot \vec{i} + m\omega^2 x \sin \alpha \cos \alpha \cdot \vec{k} \\ \vec{F}_c &= -m\vec{a}_c = -2m\omega \dot{x} \sin \alpha \cdot \vec{j} \end{aligned} \quad (d)$$

Ecuția fundamentală a dinamicii mișcării relative a punctului material:

$$m\vec{a}_r = \vec{F} + \vec{F}_t + \vec{F}_c, \quad \text{se scrie analitic astfel:} \quad (e)$$

$$\begin{aligned} m\ddot{x}\vec{i} &= (mg \cos \alpha + m\omega^2 x \sin^2 \alpha)\vec{i} + (N_y - 2m\omega \dot{x} \sin \alpha)\vec{j} + \\ &+ (N_z - mg \sin \alpha + m\omega^2 x \sin \alpha \cos \alpha)\vec{k} \end{aligned} \quad (f)$$

sau în proiecții pe axele triedrului mobil:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = m\omega^2 x \sin^2 \alpha + mg \cos \alpha \\ 0 = N_y - 2m\omega \dot{x} \sin \alpha \\ 0 = N_z - mg \sin \alpha + m\omega^2 x \sin \alpha \cos \alpha \end{cases} \quad (g)$$

Prima ecuație (g) se mai scrie:

$$\ddot{x} - \omega^2 \sin^2 \alpha \cdot x = g \cos \alpha \quad (h)$$

și are soluția de forma:  $x=C_1 e^{\omega \sin \alpha t} + C_2 e^{-\omega \sin \alpha t} - \frac{g \cdot \cos \alpha}{\omega^2 \cdot \sin^2 \alpha}$ , (i)

respectiv derivata:  $\dot{x}=\omega \sin \alpha \cdot (C_1 e^{\omega \sin \alpha t} - C_2 e^{-\omega \sin \alpha t})$  (j)

unde  $C_1$  și  $C_2$  sunt constante de integrare care se determină din condițiile inițiale ale problemei:  $x(0) = a/\sin \alpha$ , și  $\dot{x}(0) = 0$ . Se obține astfel următorul sistem de două ecuații cu două necunoscute  $C_1$  și  $C_2$ :

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = \frac{a}{\sin \alpha} + \frac{g \cos \alpha}{\omega^2 \sin^2 \alpha} \\ C_1 - C_2 = 0 \end{cases} \quad (k)$$

Dacă se notează:  $\frac{a}{\sin \alpha} + \frac{g \cdot \cos \alpha}{\omega^2 \cdot \sin^2 \alpha} = x_0$  (l)

se obține:  $C_1=C_2 = \frac{x_0}{2}$ , deci ecuația mișcării se scrie: (m)

$$x = \frac{x_0}{2} (e^{\omega \sin \alpha t} + e^{-\omega \sin \alpha t}) - \frac{g \cos \alpha}{\omega^2 \sin^2 \alpha} x = x_0 \cdot ch(\omega \sin \alpha \cdot t) - \frac{g \cos \alpha}{\omega^2 \sin^2 \alpha} \quad (n)$$

$$\dot{x} = x_0 \omega \sin \alpha \cdot sh(\omega \sin \alpha \cdot t)$$

Se poate exprima legea de mișcare și sub forma vitează funcție de spațiu ținând seama de relația matematică evidentă:  $ch^2 x - sh^2 x = 1$ ; relațiile (n) se scriu astfel:

$$\frac{x}{x_0} + \frac{g \cos \alpha}{\omega^2 x_0 \sin^2 \alpha} = ch(\omega \sin \alpha \cdot t) \quad (o)$$

$$\frac{\dot{x}}{x_0 \omega \sin \alpha} = sh(\omega \sin \alpha \cdot t)$$

rezultă deci legea de mișcare sub forma:

$$\left( \frac{x}{x_0} + \frac{g \cos \alpha}{\omega^2 x_0 \sin^2 \alpha} \right)^2 - \left( \frac{\dot{x}}{x_0 \omega \sin \alpha} \right)^2 = 1 \quad (p)$$

sau sub forma:

$$v(x) = \dot{x} = x_0 \omega \sin \alpha \sqrt{\left( \frac{x}{x_0} + \frac{g \cos \alpha}{\omega^2 x_0 \sin^2 \alpha} \right)^2 - 1} \quad (q)$$

2. Viteza cu care punctul material părăsește tubul se obține ținând seama că cele două viteze (relativă și de transport) sunt perpendiculare (conform relațiilor b):

$$v_B = \sqrt{v_{rB}^2 + v_{tB}^2} \quad (r)$$

unde:

➤ viteza relativă:  $v_{rB} = \dot{x}_B = x_0 \omega \sin \alpha \sqrt{\left(\frac{x_B}{x_0} + \frac{g \cos \alpha}{\omega^2 x_0 \sin^2 \alpha}\right)^2 - 1}$  (s)

➤ viteza de transport:  $v_{tB} = \omega \cdot x_B \sin \alpha$  (t)

unde :  $x_B = \frac{a}{\sin \alpha} + \frac{h}{\cos \alpha}$  (u)

3. Din a doua și a treia ecuație (f) rezultă reacțiunile  $N_1$  și  $N_2$  ale punctului material asupra peretelui tubului care sunt egale ca mărime cu reacțiunile  $N_z$  și  $N_y$  ce acționează asupra punctului:

$$N_2 = N_y = 2m\omega \dot{x} \sin \alpha \tag{v}$$

$$N_1 = N_z = mg \sin \alpha - m\omega^2 x \sin \alpha \cos \alpha$$

Ținând seama că cele două reacțiuni sunt perpendiculare, reacțiunea totală  $N$  asupra tubului este:

$$N = \sqrt{N_1^2 + N_2^2} = m \sin \alpha \sqrt{(g - \omega^2 x \cos \alpha)^2 + 4\omega^2 \dot{x}^2} \tag{w}$$

**PROBLEMĂ PROPUȘĂ**

**12.6.** *Se consideră cadrul  $A'ABB'$  din figura 12.6 format dintr-un tub  $AB$  înclinat cu unghiul  $\alpha$  față de axa de rotație, situat în plan vertical, care se rotește cu viteza unghiulară constantă  $\omega$ . În același timp, în interiorul tubului se deplasează fără frecare un punct material  $M$  de masă  $m$ , pornind din punctul  $O$  cu viteza inițială  $v_0$ . Se mai cunosc lungimile:  $AA' = a$ ;  $A'B' = h$ .*

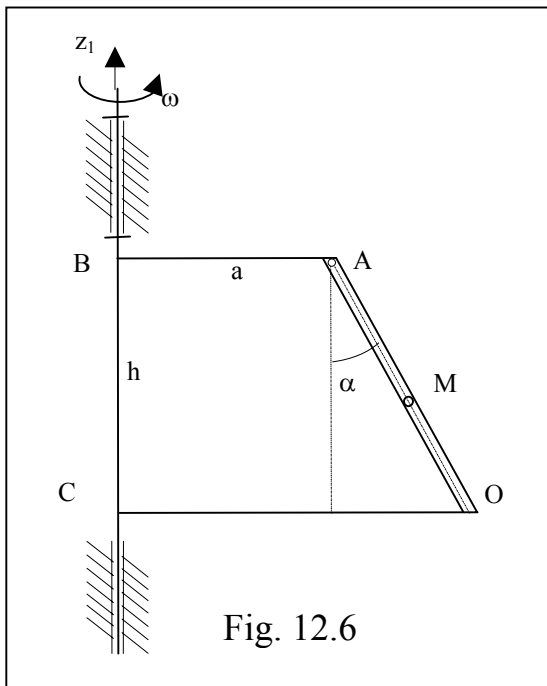


Fig. 12.6

**Se cere:**

1. să se deducă ecuațiile mișcării relative a punctului în interiorul tubului
2. să se determine forța pe care o exercită punctul material de masă  $m$  asupra peretelui tubului.
3. să se determine poziția de repaus relativ și forța pe care o exercită punctul material de masă  $m$  asupra peretelui tubului în această poziție

## CAPITOLUL XIII DINAMICA RIGIDULUI ȘI A SISTEMELOR DE RIGIDE

### PROBLEME REZOLVATE

**13.1.** *Se consideră volantul din figura alăturată care se rotește cu turația  $n_0$  [rot / min] în jurul unei axe perpendiculare pe planul său ( $xOy$ ), ce trece prin  $O$ . Volantul are raza  $R$ , greutatea  $G$  și momentul de inerție în raport cu axa de rotație ( $Oz$ )  $J_0$ . Se frânează volantul cu ajutorul a doi saboți apăsați fiecare cu forța radială  $P$  (fig. 13.1). Coeficientul de frecare, de alunecare dintre volanț și saboți este  $\mu$ . **Se cere să se calculeze numărul de ture complete  $N_1$  pe care-l efectuează volantul până la oprire.***

#### Rezolvare

Se izolează volantul, se figurează toate forțele care acționează (forțele efectiv aplicate și de legătură) și se aplică teorema momentului cinetic față de axa de rotație  $Oz$ :

$$J_0 \ddot{\varphi} = \sum_{i=1}^n M_{oz}(\overline{F}_i) \quad (a)$$

care, în cazul de față se transcrie astfel:

$$J_0 \ddot{\varphi} = -2\mu P \cdot R \quad \Leftrightarrow$$

$$\ddot{\varphi} = -\frac{2\mu P \cdot R}{J_0} \quad (= \text{constant}) \quad (b)$$

Integrând succesiv de două ori avem:

$$\dot{\varphi} = -\frac{2\mu PR}{J_0} t + C_1, \quad \varphi = -\frac{\mu PR}{J_0} t^2 + C_1 t + C_2$$

Constantele de integrare  $C_1$  și  $C_2$  se determină din condițiile inițiale:

$$t = 0 \begin{cases} \varphi(0) = 0 \\ \dot{\varphi}(0) = \omega_0 = \frac{\pi n_0}{30} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = \frac{\pi n_0}{30} \\ C_2 = 0 \end{cases} \quad (c)$$

Se obțin legile de mișcare pentru viteza unghiulară  $\omega$  și unghiul de rotație  $\varphi$ :

$$\omega = -\frac{2\mu PR}{J_0} t + \frac{\pi n_0}{30}$$

$$\varphi = -\frac{\mu PR}{J_0} t^2 + \frac{\pi n_0}{30} t \quad (d)$$

Pentru oprire se pune condiția  $\omega=0$  și se calculează timpul  $t_1$  necesar până la oprire din relația (d):

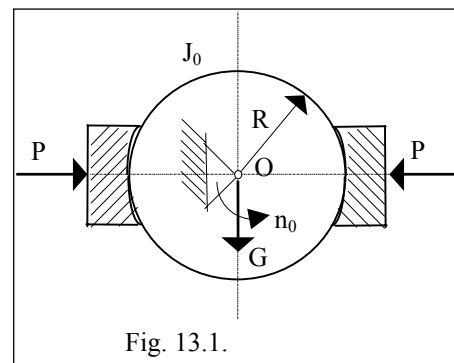


Fig. 13.1.

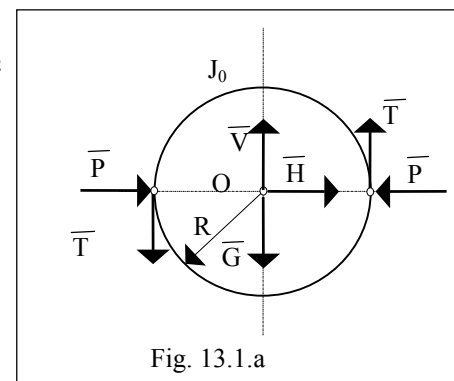


Fig. 13.1.a

$$0 = -\frac{2\mu PR}{J_0} t_1 + \frac{\pi n_0}{30} \Rightarrow t_1 = \frac{\pi n_0}{60\mu PR} J_0$$

Până la oprire volantul se rotește cu unghiul

$$\varphi_1 = -\frac{\mu PR}{J_0} t_1^2 + \frac{\pi n_0}{30} t_1 = \frac{\pi^2 n_0^2 J_0}{3600\mu PR} \quad (e)$$

Numărul de ture până la oprire va fi deci partea întreagă a valorii:

$$N_1 = \frac{\varphi_1}{2\pi} = \frac{\pi n_0 J_0}{7200\mu PR} \quad (f)$$

**Observație:** În cazul volantului sub forma unui disc omogen se poate înlocui momentul de inerție cu:  $J_0 = \frac{M \cdot R^2}{2} = \frac{G}{2g} R^2$ .

**13.2. Se consideră un disc omogen de rază  $R$  și greutate  $G$  având înfășurat pe circumferința sa un fir fixat în punctul  $A$  (fig. 13.2). Discul este lăsat să cadă liber pe verticală plecând din repaus.**

**Se cer legea de mișcare și tensiunea din fir.**

**Rezolvare**

Se aplică teorema de variație a energiei cinetice pentru intervalul de timp  $(t_0, t_1)$ :

$$E_1 - E_0 = L_{0-1} \quad (a)$$

unde:  $E_0 = 0$ , deoarece  $v_0 = 0$  și

$$E_1 = \frac{1}{2} M v_c^2 + \frac{1}{2} J_{cz} \omega^2 = \frac{1}{2} \frac{G}{g} v_c^2 + \frac{1}{2} \frac{G R^2}{g} \cdot \frac{v^2}{R^2}$$

$$E_1 = \frac{3}{4} \frac{G}{g} v_c^2$$

Lucrul mecanic efectuat asupra discului pentru același interval de timp este  $L_{0-1} = Gh$ ,

$h$  fiind deplasarea greutății  $G$  aplicată în centrul discului

Diferențiind relațiile anterioare avem:

$$dE = \frac{3}{2} \frac{G}{g} v_c a_c dt$$

$$dL = G v_c dt$$

unde  $\dot{h} = v_c, \quad \dot{v}_c = a_c$

Din teorema energiei scrisă sub forma diferențială  $dE = dL$  se obține accelerația centrului discului:

$$a_c = \frac{2}{3} g$$

Aplicând teorema impulsului în proiecții pe verticală:

$$M a_c = Y \quad \text{sau} \quad \frac{G}{g} a_c = Y \quad (d)$$

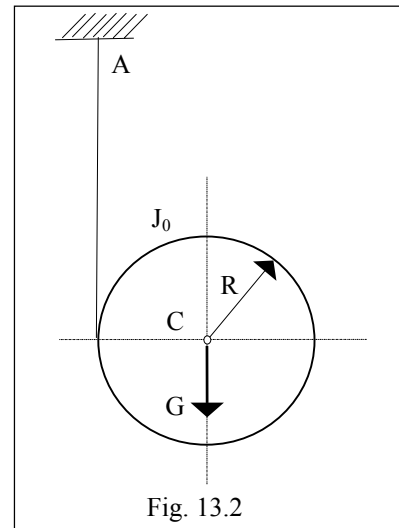


Fig. 13.2

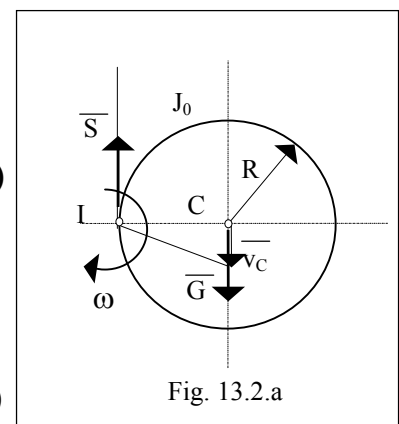


Fig. 13.2.a



unde :  $Y$  reprezintă suma proiecțiilor pe verticală (pe axa  $Cy$ ) a tuturor forțelor

Prin urmare din (d) putem deduce tensiunea din fir  $S$ :

$$\frac{G}{g} a_c = G - S \Rightarrow S = \frac{G}{3} \quad (e)$$

**Observație:** Aceleași rezultate se obțin dacă se folosește teorema momentului cinetic scrisă succesiv, față de centrul instantaneu de rotație I și față de centrul discului C avem:

$$J_{Iz} \ddot{\varphi} = \sum_{i=1}^n M_{Iz}(F_i) \Rightarrow \frac{G}{g} \frac{3R^2}{2} \ddot{\varphi} = G \cdot R$$

$$J_{Cz} \ddot{\varphi} = \sum_i M_{Cz}(F_i) \Rightarrow \frac{G}{g} \frac{R^2}{2} \ddot{\varphi} = S \cdot R$$

Ținând seama că  $\ddot{\varphi} = \varepsilon = \frac{a_c}{R}$  se obțin relațiile (c) și (e).

**13.3. Se consideră** bara  $OA$  de lungime  $2a$  și greutate  $G$  articulată în  $O$  din fig. 13.3, care se află la momentul inițial în repaus în poziție orizontală, de unde i se dă drumul fără viteză inițială. Articulația  $O$  este fără frecare. **Se cere** să se determine viteza unghiulară și unghiul  $\alpha$  format de reacțiunea totală din  $O$   $R^{leg}$  și axa longitudinală a barei.

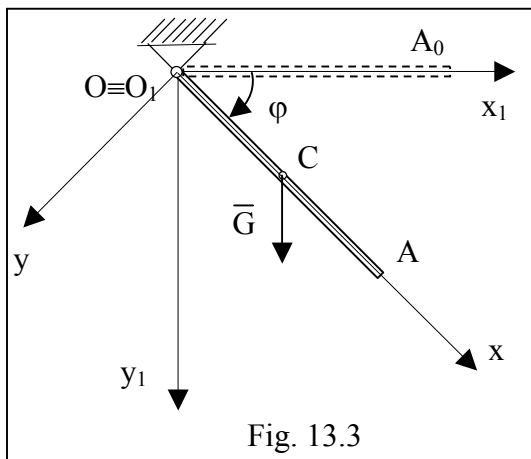


Fig. 13.3

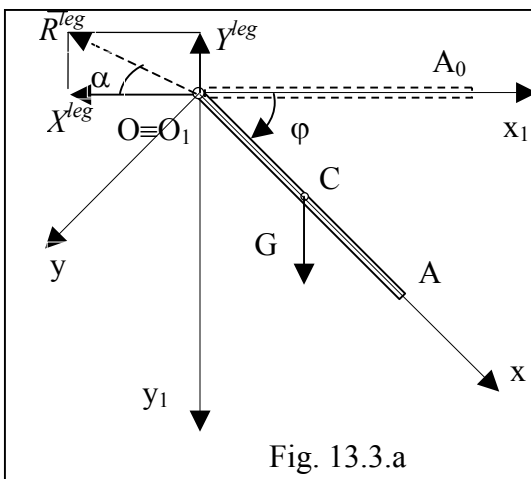


Fig. 13.3.a

**Rezolvare**

*Metoda I.* Se ale un sistem de axe fix cu axa  $O_1z_1$  să coincidă cu axa de rotația a barei și același sens cu viteza unghiulară  $\overline{\omega}$  și un sistem de axe mobil cu axa  $Ox$  să coincidă cu axa longitudinală a barei iar  $Oz$  să coincidă cu axa  $O_1z_1$  (fig13.3.a). Viteza unghiulară rezultă din teortema momentului cinetic scrisă sub forma:

$$J_z \varepsilon = M_z \text{ sau } : J_z \ddot{\varphi} = M_z$$

unde : (a)

$$J_z = \frac{4a^2 G}{3g}, \text{ iar } M_z = G a \cos \varphi$$

Deci teorema momentului cinetic devine:

$$\frac{4a^2 G}{3g} \ddot{\varphi} = G a \cos \varphi \Rightarrow \ddot{\varphi} = \frac{3g}{4a} \cos \varphi \quad (b)$$

Dacă se multiplică ecuația (b) cu :  $d\varphi = \dot{\varphi} dt$  și se integrează se obține:

$$\ddot{\varphi} \dot{\varphi} dt = \frac{3g}{4a} \cos \varphi \cdot d\varphi \Rightarrow \frac{\dot{\varphi}^2}{2} = \frac{3g}{4a} \sin \varphi + C \quad (c)$$

Constanta de integrare C se determină din condițiile inițiale  $\varphi = 0 \Rightarrow \dot{\varphi} = 0$  care conduce la  $C=0$ . Deci viteza unghiulară este:

$$\omega = \dot{\varphi} = \sqrt{\frac{3g}{2a} \sin \varphi} \quad (d)$$

*Metoda a II-a.* Se poate determina viteza unghiulară folosind teorema de variație a energiei cinetice sub forma:  $E_1 - E_0 = L_{0-1}$  (e)

unde  $E_0 = 0$  este energia cinetică la momentul inițial,

iar  $E_1 = \frac{1}{2} J_0 \omega^2$ , este energia cinetică la un moment oarecare t.

$J_0 = \frac{4a^2 G}{3g}$  este momentul de inerție mecanic al barei față de axa de

rotație ce trece prin O;

$L_{0-1} = Ga \sin \varphi$ , este lucrul mecanic al forței de greutate a barei.

Înlocuind aceste valori se obține același rezultat (d):  $\omega = \sqrt{\frac{3g}{2a} \sin \varphi}$

Pentru poziția verticală a barei se obține viteza unghiulară (maximă):

$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{2a}} \quad (f)$$

2. Pentru determinarea reacțiunii  $\bar{R}^{leg}$  se folosește teorema impulsului scrisă sub forma teoremei mișcării centrului de masă C, adică:

$$M\ddot{\bar{\rho}}_1 = \bar{R}^a + \bar{R}^{leg} \quad (g)$$

care proiectată pe axele sistemului fix  $O_1x_1y_1$  se obține:

$$\begin{cases} M\ddot{\xi}_1 = X^{leg} \\ M\ddot{\eta}_1 = Y^{leg} - G \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{G}{g}\ddot{\xi}_1 = X^{leg} \\ \frac{G}{g}\ddot{\eta}_1 = Y^{leg} - G \end{cases} \quad (h)$$

Unde  $\xi_1$  și  $\eta_1$  sunt coordonatele punctului C. Acestea și derivatele corespunzătoare se scriu astfel:

$$\begin{cases} \xi_1 = a \cos \varphi \\ \eta_1 = a \sin \varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{\xi}_1 = -a\dot{\varphi} \sin \varphi \\ \dot{\eta}_1 = a\dot{\varphi} \cos \varphi \end{cases} \quad (i)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \ddot{\xi}_1 = -a\ddot{\varphi} \sin \varphi - a\dot{\varphi}^2 \cos \varphi \\ \ddot{\eta}_1 = a\ddot{\varphi} \cos \varphi - a\dot{\varphi}^2 \sin \varphi \end{cases}$$

Ținând seama de relația (b) a lui  $\ddot{\varphi}$  și (d) a vitezei unghiulare  $\dot{\varphi}$ , ultimele relații (i) devin:

$$\begin{cases} \ddot{\xi}_1 = \frac{9}{8} g \sin 2\varphi \\ \ddot{\eta}_1 = \frac{3}{4} g(1 - 3 \sin^2 \varphi) \end{cases} \quad (j)$$

astfel încât relațiile (h) devin:

$$\begin{cases} X^{leg} = \frac{9}{8} G \sin 2\varphi \\ Y^{leg} = G \left[ 1 + \frac{3}{4} (1 - 3 \sin^2 \varphi) \right] \end{cases} \quad (j)$$

Se obține în final unghiul  $\alpha$  căutat (fig.13.3.a):

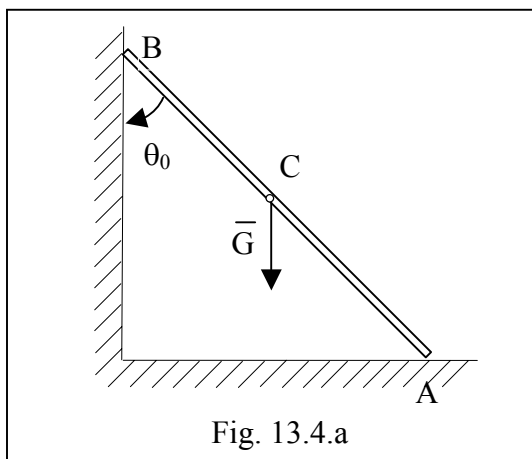
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1 + \frac{3}{4} (1 - 3 \sin^2 \varphi)}{\frac{9}{8} \sin 2\varphi} \quad (k)$$

Pentru două poziții particulare ale barei date de  $\varphi=0$  și  $\varphi=90^\circ$  se obține:

$$\varphi = 0 \Rightarrow \begin{cases} X^{leg} = 0 \\ Y^{leg} = \frac{G}{4} \end{cases} ; \quad \varphi = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \begin{cases} X^{leg} = 0 \\ Y^{leg} = \frac{5G}{2} \end{cases} \quad (l)$$

**13.4. Se consideră** bara AB de lungime  $2\ell$  și greutate  $G$  din fig. 13.4.a, care se deplasează fără frecare sprijinindu-se cu extremitățile ei pe un perete vertical și pe o suprafață orizontală. Bara se află la momentul inițial în repaus făcând cu direcția verticală unghiul  $\theta_0$  de unde i se dă drumul fără viteză inițială.

**Se cere** să se determine legea de mișcare și forțele de legătură cu cele două suprafețe.



**Rezolvare**

*Metoda I.* Pentru determinarea mișcării și a forțelor de legătură se alege sistemul de referință fix  $O_1x_1y_1$  în planul vertical al mișcării (fig 13.4.b) și se aplică teoremele impulsului și momentului cinetic față de centrul maselor  $C(\xi_1, \eta_1)$ :

$$M\ddot{\bar{p}}_1 = \bar{R} \quad \text{si} \quad \dot{\bar{K}}_C = \bar{M}_C \quad (a)$$

$$\text{unde} \quad \left| \dot{\bar{K}}_C \right| = J_{Cz} \ddot{\theta} = \frac{G}{g} \frac{(2\ell)^2}{12} \ddot{\theta} \quad (b)$$

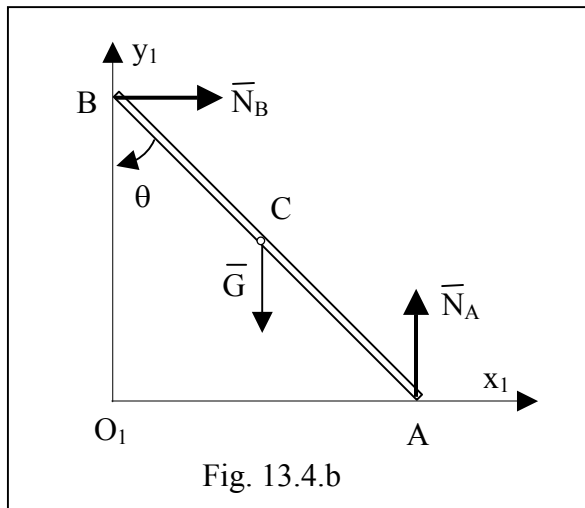


Fig. 13.4.b

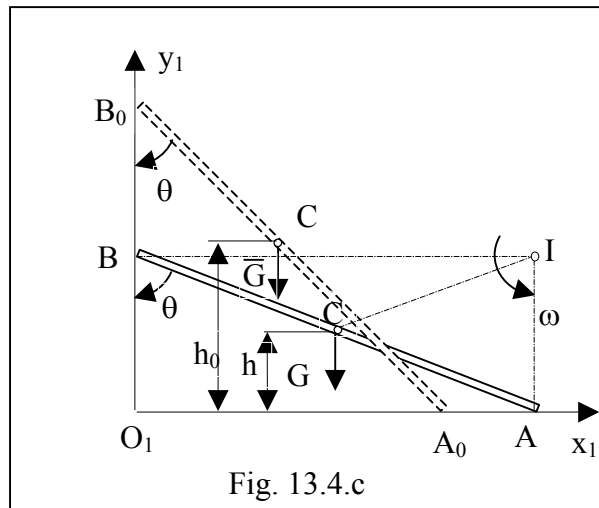


Fig. 13.4.c

În proiecții pe axele sistemului de coordonate aceste relații se scriu:

$$\begin{cases} \frac{G}{g} \ddot{\xi}_1 = N_B \\ \frac{G}{g} \ddot{\eta}_1 = N_A - G \end{cases} \quad \text{(c) respectiv: } \frac{Gl^2}{3g} \ddot{\theta} = N_A \ell \sin \theta - N_B \ell \cos \theta \quad \text{(d)}$$

Coordonatele centrului de masă și derivatele corespunzătoare se scriu astfel:

$$\begin{cases} \xi_1 = \ell \sin \theta \\ \eta_1 = \ell \cos \theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{\xi}_1 = \ell \dot{\theta} \cos \theta \\ \dot{\eta}_1 = -\ell \dot{\theta} \sin \theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{\xi}_1 = \ell \ddot{\theta} \cos \theta - \ell \dot{\theta}^2 \sin \theta \\ \ddot{\eta}_1 = -\ell \ddot{\theta} \sin \theta - \ell \dot{\theta}^2 \cos \theta \end{cases} \quad \text{(e)}$$

Introducând aceste rezultate în relațiile (c) se obține:

$$\begin{cases} \frac{G}{g} \ell (\ddot{\theta} \cos \theta - \dot{\theta}^2 \sin \theta) = N_B \\ -\frac{G}{g} \ell (\ddot{\theta} \sin \theta + \dot{\theta}^2 \cos \theta) = -G + N_A \end{cases} \quad \text{(f)}$$

Introducând aceste rezultate în relațiile (d) se obține ecuația diferențială a mișcării:

$$\ddot{\theta} = \frac{3g}{4\ell} \sin \theta \quad \text{(g)}$$

Dacă se multiplică ecuația (g) cu :  $d\theta = \dot{\theta} dt$  și se integrează se obține:

$$\ddot{\theta} \dot{\theta} dt = \frac{3g}{4\ell} \sin \theta \cdot d\theta \Rightarrow \frac{\dot{\theta}^2}{2} = -\frac{3g}{4\ell} \cos \theta + C \quad \text{(h)}$$

Constanta de integrare C se determină din condițiile inițiale:

$$t = 0 \Rightarrow \theta = \theta_0 \text{ și } \dot{\theta} = 0, \text{ care conduce la } C = \frac{3g}{4\ell} \cos \theta_0. \quad \text{(i)}$$

Deci legea de mișcare este:

$$\dot{\theta}^2 = \frac{3g}{2\ell} (\cos \theta_0 - \cos \theta) \quad \text{(j)}$$

Forțele de legătură  $N_A$  și  $N_B$  se obțin înlocuind în relațiile (f)  $\ddot{\theta}$  și  $\dot{\theta}^2$  obținute în relațiile (g) și (j):

$$\begin{cases} N_B = G \left( \frac{3}{4} \sin \theta \cos \theta - \frac{3}{2} (\cos \theta_0 - \cos \theta) \sin \theta \right) \\ N_A = G \left( 1 - \frac{3}{4} \sin \theta \sin \theta - \frac{3}{2} (\cos \theta_0 - \cos \theta) \cos \theta \right) \end{cases} \quad (k)$$

*Metoda a II-a.* Se poate determina viteza unghilară folosind teorema de variație a energiei cinetice sub forma:  $E_1 - E_0 = L_{0-1}$  (l)

unde  $E_0 = 0$  este energia cinetică la momentul inițial,

iar  $E_1 = \frac{1}{2} \frac{G}{g} v_c^2 + \frac{1}{2} J_{cz} \omega^2$ , este energia cinetică la un moment oarecare  $t_1$ .

$J_{cz} = \frac{G(2\ell)^2}{g \cdot 12} = \frac{G\ell^2}{3g}$  este momentul de inerție mecanic al barei față de axa

de rotație ce trece prin C;

Deci:  $E_1 = \frac{2G\ell^2}{3g} \omega^2$  (m)

$L_{0-1} = G(h_0 - h) = G\ell(\cos \theta_0 - \cos \theta)$ , este lucrul mecanic al forței de greutate a barei. Înlocuind aceste valori se obține același rezultat (j):

$$\frac{2G\ell^2}{3g} \omega^2 = G\ell(\cos \theta_0 - \cos \theta) \Rightarrow \omega^2 = \frac{3g}{2\ell} (\cos \theta_0 - \cos \theta) \quad (n)$$

Derivând în raport cu timpul relația (n) se obține (g):

$$2\omega \dot{\omega} = \frac{3g}{2\ell} \dot{\theta} \sin \theta \Rightarrow \ddot{\theta} = \dot{\omega} = \frac{3g}{4\ell} \sin \theta \quad (o)$$

**13.5. Se consideră sistemul format dintr-un corp de greutate  $G_1$  și un disc omogen de rază  $R$  și greutate  $G_2$  având înfășurat pe circumferința sa un fir de care este fixat primul corp (fig. 13.5). Corpul este lăsat liber plecând din repaus. Se cere legea de mișcare și tensiunea din fir.**

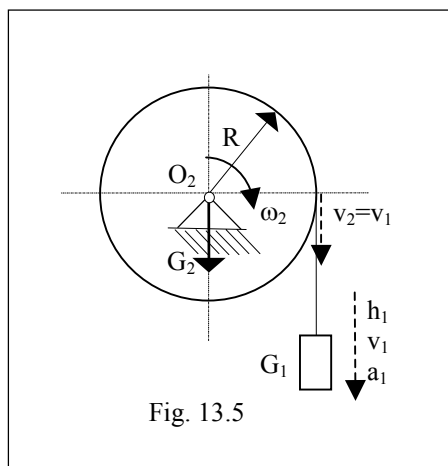


Fig. 13.5

**Rezolvare**

Se aplică teorema de variație a energiei cinetice sub forma diferențială:

$$dE = dL \quad (a)$$

$$E = E_1 + E_2 = \frac{1}{2} \frac{G_1}{g} v_1^2 + \frac{1}{2} J_2 \omega_2^2$$

unde:

$$\text{unde } \omega_2 = \frac{v_1}{R_2}, \quad J_2 = \frac{G_2 R_2^2}{2g}$$

Rezultă:  $E = \frac{v_1^2}{4g} (2G_1 + G_2)$  (b)

Diferențiind relația (b) rezultă:  $dE = \frac{1}{2g}(2G_1 + G_2)v_1 a_1 dt$  (b')

$L = L_1 + L_2 = G_1 h_1 + 0 \Rightarrow dL = G_1 v_1 dt$  (c)

Înlocuind în relația (a) rezultă accelerația sistemului:

$a_1 = \frac{2G_1}{2G_1 + G_2} g$  (d)

Integrând succesiv de două ori relația (d) se obține viteza și deplasarea corpului 1:

$v_1 = \frac{2G_1}{2G_1 + G_2} gt + C_1$  și  $h_1 = \frac{G_1}{2G_1 + G_2} gt^2 + C_1 t + C_2$  (e)

Constantele de integrare  $C_1$  și  $C_2$  se obțin din condițiile inițiale:

$t=0 \Rightarrow v_1=0, h_1=0$ , rezultă așadar:  $C_1=C_2=0$ .

Deci relațiile (e) se scriu:

$v_1 = \frac{2G_1}{2G_1 + G_2} gt_1$  și  $h_1 = \frac{G_1}{2G_1 + G_2} gt_1^2$  (f)

Viteza și deplasarea corpului 2 se obțin ținând seama de relația (b):

$\omega_2 = \frac{v_1}{R_2} = \frac{2G_1}{2G_1 + G_2} \frac{g}{R_2} t_1$  și  $\varphi_2 = \frac{G_1}{2G_1 + G_2} \frac{g}{R_2} t_1^2$  (g)

2) Pentru calculul tensiunii din fir  $S$  se separă cele două corpuri și se scrie teorema impulsului pentru corpul 1 (fig. 13.5.a):

$M_1 \bar{a}_1 = \sum \bar{F}^a + \bar{F}^{leg}$  (g)

care în proiecție pe direcția mișcării se scrie:

$\frac{G_1}{g} a_1 = G_1 - S \Rightarrow S = G_1 \left( 1 - \frac{a_1}{g} \right) = \frac{G_1 G_2}{2G_1 + G_2}$  (h)

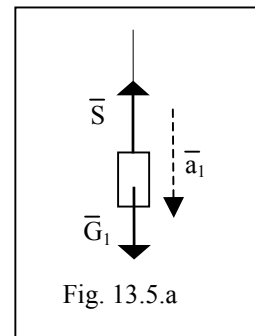


Fig. 13.5.a

**13.6. Se consideră** sistemul format dintr-un trolie de raze  $R$  și  $r$ , de greutate  $G_3$  pe circumferințele trolieului fiind înfășurate două fire inextensibile de care sunt prinse două greutăți  $G_1$  și  $G_2$  (fig. 13.6). Se neglijează frecările. Sistemul este lăsat liber plecând din repaus. **Se cere** legea de mișcare a sistemului și tensiunile din cele două fire.

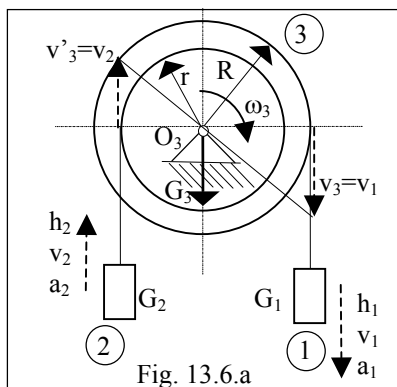


Fig. 13.6.a

**Rezolvare**

Firele fiind inextensibile  $dL^{int} = 0$ , astfel încât pentru determinarea mișcării se aplică teorema de variație a energiei cinetice sub forma diferențială:

$dE = dL$  (a)

Se face o analiză cinematică a mișcării celor două corpuri ale sistemului (2 și 3) în funcție de mișcarea corpului 1, conform tabelului de mai jos.

Corpul și tipul mișcării	Deplasarea	Viteza	Accelerația	Deplasarea virtuală
1 Translație	$h_1$	$v_1$	$a_1$	$\delta h_1$
2 Translație	$h_2 = \frac{r h_1}{R}$	$v_2 = \frac{r v_1}{R}$	$a_2 = \frac{r a_1}{R}$	$\delta h_2 = \frac{r \delta h_1}{R}$
3 Rotație	$\varphi_3 = \frac{h_1}{R}$	$\omega_3 = \frac{v_1}{R}$	$\varepsilon_3 = \frac{a_1}{R}$	$\delta \varphi_3 = \frac{\delta h_1}{R}$

Energia cinetică totală a sistemului fiind:

$$E = E_1 + E_2 + E_3 = \frac{1}{2} \frac{G_1}{g} v_1^2 + \frac{1}{2} \frac{G_2}{g} v_2^2 + \frac{1}{2} J_3 \omega_3^2 \quad (a)$$

Dacă presupunem că discul 3 este omogen de rază  $R$  și masă  $G_3/g$  atunci momentul de inerție se scrie:  $J_3 = \frac{G_3 R^2}{2g}$ .

Deci energia cinetică a sistemului se scrie:

$$E = \frac{v_1^2}{4g} \left( 2G_1 + \frac{2r^2}{R^2} G_2 + G_3 \right) \quad (b)$$

Diferențiind relația (b) rezultă:  $dE = \frac{1}{2g} \left( 2G_1 + \frac{2r^2}{R^2} G_2 + G_3 \right) v_1 a_1 dt$  (b')

$$L = L_1 + L_2 + L_3 = G_1 h_1 + 0 - G_3 h_3 = \left( G_1 - \frac{r}{R} G_2 \right) h_1 \quad (c)$$

Diferențiind relația (c) rezultă:  $dL = \left( G_1 - \frac{r}{R} G_2 \right) v_1 dt$  (c')

Înlocuind în expresia teoremei energiei cinetice  $dE=dL$ , rezultă accelerația sistemului:

$$a_1 = \frac{\left( G_1 - \frac{r}{R} G_2 \right)}{\left( G_1 + \frac{r^2}{R^2} G_2 + \frac{G_3}{2} \right)} g \quad (d)$$

Integrând succesiv de două ori relația (d) se obține viteza și respectiv deplasarea corpului 1:  $v_1 = a_1 t + C_1$  și  $h_1 = a_1 t^2 + C_1 t + C_2$  (e)

Constantele de integrare  $C_1$  și  $C_2$  se obțin din condițiile inițiale:

$$t=0 \Rightarrow v_1=0, \quad h_1=0, \text{ rezultă așadar: } C_1=C_2=0.$$

Vitezele și deplasările corpurilor 2 și 3 se obțin ținând seama de relațiile din tabelul de mai sus.

2) Pentru calculul tensiunii  $S$  din fir se separă cele trei corpuri și se scrie:

➤ teorema impulsului pentru corpul 1 (fig. 13.6.a):

$$M_1 \bar{a}_1 = \sum \bar{F}^a + \bar{F}^{leg} \quad (f)$$

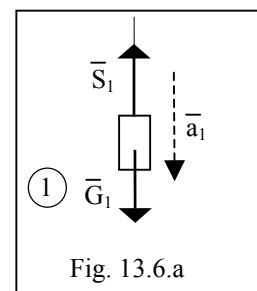


Fig. 13.6.a

care în proiecție pe direcția mișcării se scrie:

$$\frac{G_1}{g} a_1 = G_1 - S_1 \Rightarrow S_1 = G_1 \left( 1 - \frac{a_1}{g} \right) \quad (g)$$

➤ teorema impulsului pentru corpul 2 (fig. 13.6.b):

$$M_2 \bar{a}_2 = \sum (\bar{F}^a + \bar{F}^{leg}) \quad (h)$$

care în proiecție pe direcția mișcării se scrie:

$$\frac{G_2}{g} \frac{r}{R} a_1 = -G_2 + S_2 \Rightarrow S_2 = G_2 \left( 1 + \frac{a_1}{g} \frac{r}{R} \right) \quad (i)$$

➤ teorema impulsului pentru corpul 3 (fig. 13.6.c):

$$M_3 \bar{a}_3 = \sum (\bar{F}^a + \bar{F}^{leg}) \quad (h)$$

care în proiecție pe cele două direcții se scrie:

$$0 = H_3$$

$$0 = V_3 - G_3 - S_1 - S_2 \Rightarrow V_3 = G_3 + S_1 + S_2 \quad (i)$$

$$V_3 = G_1 \left( 1 - \frac{a_1}{g} \right) + G_2 \left( 1 + \frac{a_1}{g} \frac{r}{R} \right) + G_3$$

➤ teorema momentului cinetic pentru corpul 3:

$$J_3 \varepsilon_3 = \sum (M^a + M^{leg})$$

$$\frac{G_3 R_2}{2g} \frac{a_1}{R} = S_1 R - S_2 r \quad (j)$$

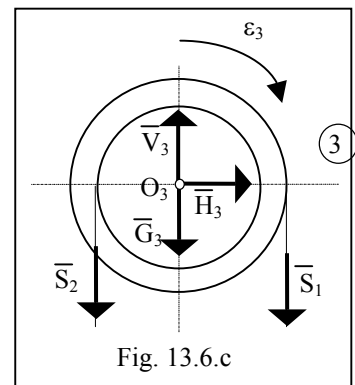
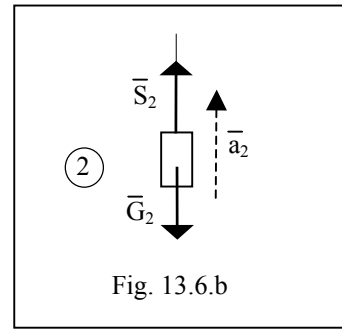
**Observație:**

Relația (j) este o relația de verificare, întrucât în aceasta toate mărimile sunt cunoscute. Dacă nu se aplică teorema energiei cinetice atunci relațiile obținute prin separarea corpurilor și aplicarea teoremelor impulsului și momentului cinetic sunt suficiente pentru determinarea mișcării și a forțelor de legătură ale sistemului.

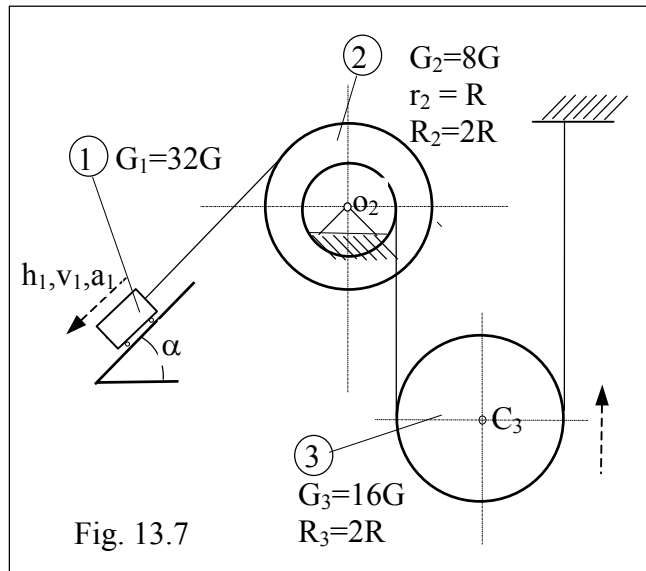
**13.7. Se consideră** sistemul de corpuri din fig. 13.7, în care mărimile  $R$ ,  $G$ ,  $\alpha$ , sunt cunoscute. Corpul (1) coboară pe planul înclinat (se neglijează frecarea de alunecare) având parametrii cinematicii:  $h_1$ ,  $v_1$ ,  $a_1$ ; corpul (2) se consideră omogen de rază  $R_2$  și este antrenat prin intermediul firului într-o mișcare de rotație (fără frecare în lagărul  $O_2$ ), iar corpul (3) se deplasează în sus având o mișcare plan-paralelă.

**Se cere:**

- 1) Să se determine mișcarea sistemului cu ajutorul teoremei energiei cinetice (parametrii  $h_1$ ,  $v_1$ ,  $a_1$ );
- 2) Să se determine forțele de legătură, prin aplicarea teoremelor impulsului și a momentului cinetic.



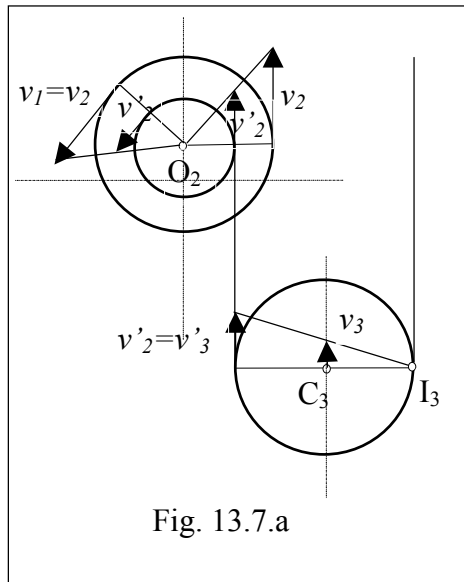




**Rezolvare**

1) Pentru rezolvarea problemei se face mai întâi o analiză cinematică a mișcării, adică găsirea relațiilor de lanț cinematic, ceea ce înseamnă exprimarea parametrilor cinematici ai corpurilor (2) și (3) în funcție de parametrii cinematici ai corpului (1). Se scriu relațiile de lanț cinematic pentru viteze, iar pentru deplasări și accelerații se ține seama de relațiile diferențiale dintre ele (fig. 13.7.a) Astfel:

Pentru corpul 1 și 2:



$$v_1 = v_2$$

$$\omega_2 = \frac{v_2}{R_2} = \frac{v'_2}{r_2} \Rightarrow \omega_2 = \frac{v_2}{2R} = \frac{v'_2}{R} \Rightarrow \begin{cases} \omega_2 = \frac{v_1}{2R} \\ v'_2 = \frac{v_1}{2} \end{cases} \quad (a)$$

Pentru corpul 3:

$$v'_3 = v'_2 = \frac{v_1}{2}$$

$$\omega_3 = \frac{v'_3}{2R_3} = \frac{v_3}{R_3} \Rightarrow \omega_3 = \frac{v_1}{8R} = \frac{v_3}{2R} \Rightarrow \begin{cases} v_3 = \frac{v_1}{4} \\ \omega_3 = \frac{v_1}{8R} \end{cases} \quad (b)$$

Rezultatele analizei cinematice se trec în tabelul următor:

Corpul și tipul mișcării	Deplasarea	Viteza	Accelerația	Deplasarea virtuală
(1) Translație	$h_1$	$v_1$	$a_1$	$\delta h_1$
(2) Rotație	$\varphi_2 = \frac{h_1}{2R}$	$\omega_2 = \frac{v_1}{2R}$	$\varepsilon_2 = \frac{a_1}{2R}$	$\delta\varphi_2 = \frac{\delta h_1}{2R}$
(3) Plan-paralelă	$h_3 = \frac{h_1}{4}$	$v_3 = \frac{v_1}{4}$	$a_3 = \frac{a_1}{4}$	$\delta h_3 = \frac{\delta h_1}{4}$
	$\varphi_3 = \frac{h_1}{8R}$	$\omega_3 = \frac{v_1}{8R}$	$\varepsilon_3 = \frac{a_1}{8R}$	$\delta\varphi_3 = \frac{\delta h_1}{8R}$

Aplicând teorema de variație a energiei cinetice pentru întregul sistem de corpuri, sub forma

$$dE = dL \tag{c}$$

unde energia cinetică totală  $E$  este suma energiilor cinetice ale celor trei corpuri:

$$E = E_1 + E_2 + E_3$$

$$E_1 = \frac{1}{2} M_1 v_1^2 = \frac{1}{2} \frac{G}{g} v_1^2 = 16 \frac{G}{g} v_1^2$$

Presupunând că cele două roți sunt omogene, putem scrie:

$$E_2 = \frac{1}{2} J_2 \omega_2^2 = \frac{1}{2} \frac{M_2 R_2^2}{2} \omega_2^2 = \frac{1}{2} \frac{8G}{2g} 4R^2 \frac{v_1^2}{4R} = 2 \frac{G}{g} v_1^2 \tag{d}$$

$$E_3 = \frac{1}{2} M_3 v_3^2 + \frac{1}{2} J_3 \omega_3^2 = \frac{1}{2} \frac{16G}{g} \frac{v_1^2}{16} + \frac{1}{2} \frac{16G}{2g} 4R^2 \frac{v_1^2}{64R} = \frac{3}{4} \frac{G}{g} v_1^2$$

$$\text{Prin urmare: } E = \frac{75}{4} \frac{G}{g} v_1^2 \Rightarrow dE = \frac{75}{2} \frac{G}{g} a_1 v_1 dt \tag{e}$$

Lucrul mecanic total al forțelor sistemului, conform fig. 13.7.b, este:

$$L = L_1 + L_2 + L_3$$

$$\text{unde: } L_1 = (G_1 \sin \alpha) h_1 = (32G \sin \alpha) h_1; \quad L_2 = 0; \quad L_3 = -G_3 h_3 = -4G h_1$$

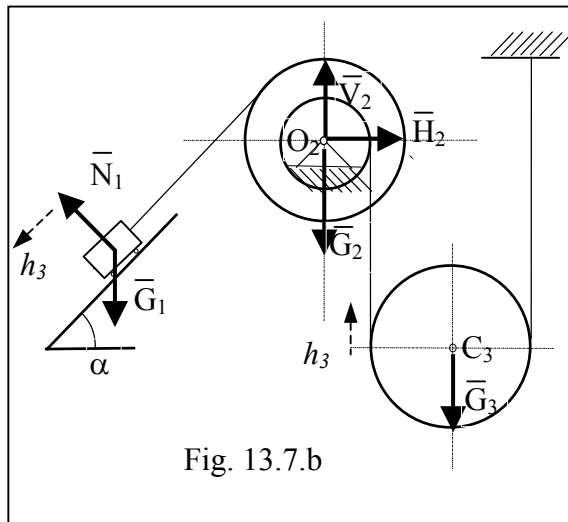


Fig. 13.7.b

Prin urmare:

$$L = 4G(8 \sin \alpha - 1) h_1 \tag{f}$$

$$\Rightarrow dL = 4G(8 \sin \alpha - 1) v_1 dt$$

Înlocuind în teorema energiei cinetice (c) expresiile lui  $dE$  și  $dL$  se obține accelerația corpului (1):

$$a_1 = \frac{8(8 \sin \alpha - 1)}{75} g \tag{g}$$

Prin integrare succesivă se obține viteza  $v_1$  și respectiv deplasarea  $h_1$ .

### 2) Calculul reacțiunilor

Se separă corpurile și se înlocuiesc legăturile cu forțe de legătură, fiecare corp fiind acționat de forțele efective aplicate și de forțe de legătură (reacțiuni) și se scriu teoremele generale (teorema impulsului și a momentului cinetic)

a. Pentru corpul (1)(fig. 13.7.c)

teorema impulsului se scrie astfel:

$$M_1 \bar{a}_1 = \bar{R}_1 \Rightarrow \begin{cases} \frac{G_1}{g} a_1 = G_1 \sin \alpha - S_1 \\ 0 = -G_1 \cos \alpha + N_1 \end{cases} \tag{i}$$

se obține:

$$S_1 = \frac{32G}{75} (11 \sin \alpha + 8); \quad N_1 = 32G \cos \alpha \tag{j}$$

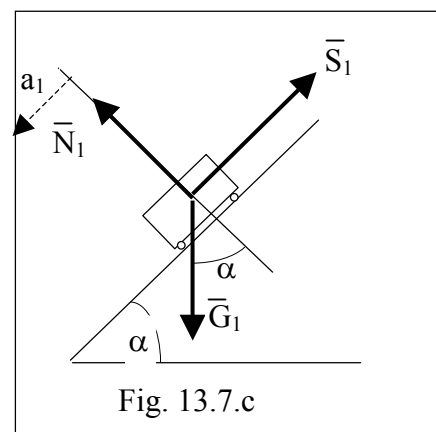


Fig. 13.7.c

b. Pentru corpul (2) se scriu atât teorema impulsului cât și teorema momentului cinetic în raport cu centrul maselor  $O_2$  (fig. 13.7.d):

$$M_2 \bar{a}_2 = \bar{R}_2 \Rightarrow \begin{cases} 0 = H_2 - S_1 \cos \alpha \\ 0 = V_2 - S_1 \sin \alpha - G_2 - S_2 \end{cases}$$

$$J_2 \varepsilon_2 = \sum M_{O_2} \Rightarrow \frac{8G}{g} \cdot \frac{(2R)^2}{2} \cdot \frac{a_1}{2R} = S_1 \cdot 2R - S_2 \cdot R$$

$$\Rightarrow S_2 = \frac{64G}{75} (3 \sin \alpha + 9);$$

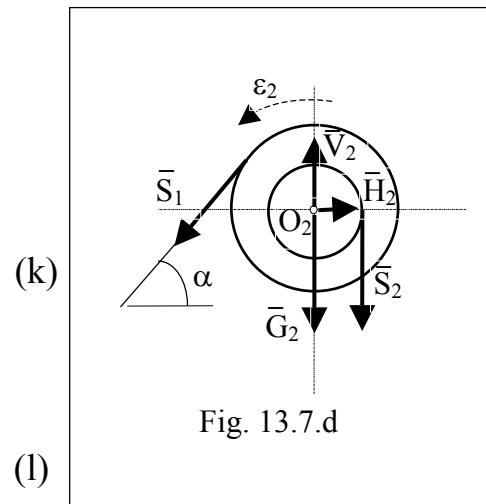
$$H_2 = S_1 \cos \alpha; \quad V_2 = S_1 \sin \alpha + G_2 + S_2$$

c. Pentru corpul (3), se se scriu atât teorema impulsului cât și teorema momentului cinetic în raport cu centrul maselor  $C_3$  (fig. 13.7.e):

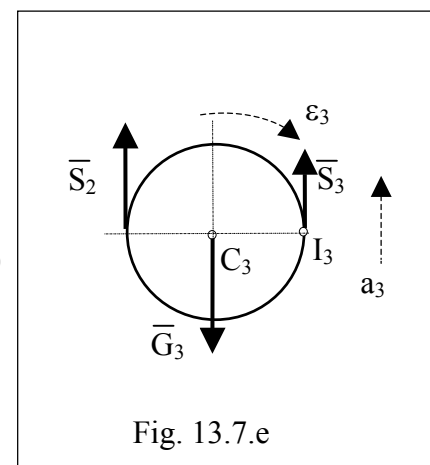
$$M_3 \bar{a}_3 = \bar{R}_3 \Rightarrow \begin{cases} \frac{G_3}{g} a_3 = S_2 + S_3 - G_3 \end{cases}$$

$$J_3 \varepsilon_3 = \sum M_{C_3} \Rightarrow \frac{16G}{g} \cdot \frac{4R^2}{2} \cdot \frac{a_1}{8R} = (S_2 - S_3) \cdot 2R$$

$$\text{Din prima ecuație (m)} \Rightarrow S_3 = \frac{16G}{75} (4 \sin \alpha + 37)$$



(m)



**Observații:** a. Ultima ecuație din cele două ecuații (m) este pentru verificare.

b. Această problemă este rezolvată și în capitolul XIV folosind principiile mecanicii analitice (problema 14.1.6).

**13.8. Se consideră** sistemul din figură unde mărimile  $R$ ,  $G$ ,  $\alpha$ , sunt cunoscute. Roata (3) de rază  $R_3$  coboară pe planul înclinat, rostogolindu-se fără alunecare ( $s \neq 0$ ), roata (2) de rază  $R_2$  se este antrenată prin intermediul unui fir într-o mișcare de rotație (fără frecare în lagărul  $O_2$ ), iar corpul (1) se deplasează în sus având parametrii cinematicii  $h_1$ ,  $v_1$ ,  $a_1$  (fig. 13.8). Presupunem că roțile 2 și 3 sunt omogene. **Se cere:**

1. Să se determine mișcarea sistemului cu ajutorul teoremei energiei cinetice (parametrii  $h_1$ ,  $v_1$ ,  $a_1$ );
2. Să se determine forțele de legătură, prin aplicarea teoremelor generale

### Rezolvare

1. Pentru rezolvarea problemei este necesară analiza cinematică a mișcării, adică exprimarea parametrilor cinematici ai corpurilor (2) și (3) în funcție de parametrii cinematici ai corpului (1). Se scriu relațiile de lanț cinematic pentru viteze, iar pentru deplasări și accelerații se ține seama de relațiile diferențiale dintre ele (fig. 13.8.a)

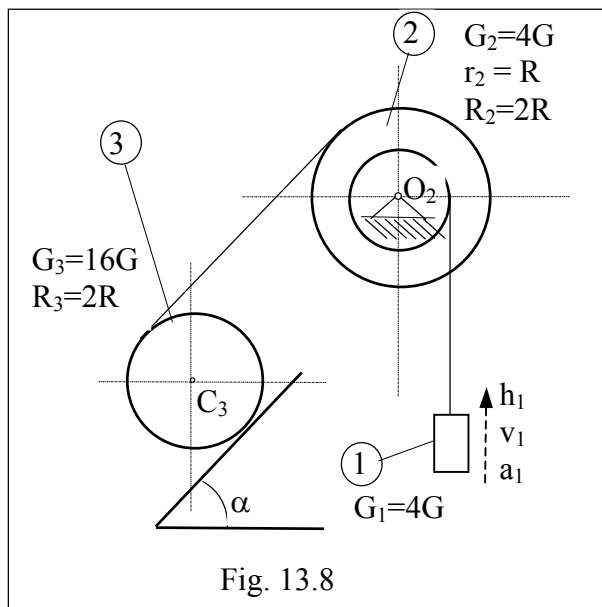


Fig. 13.8

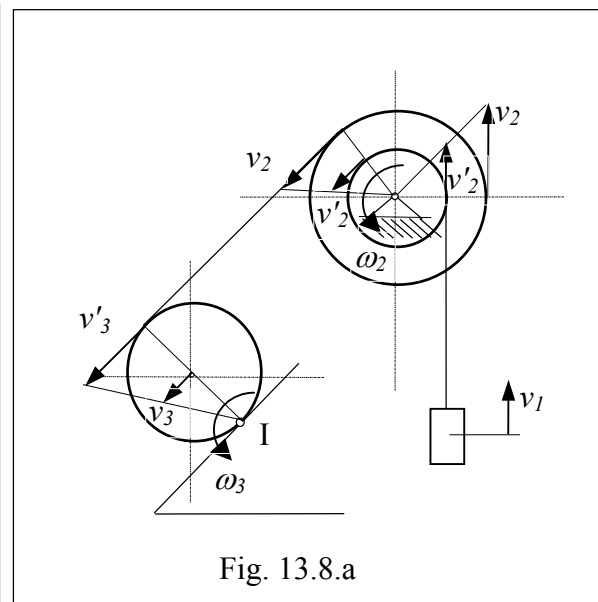


Fig. 13.8.a

Pentru corpul 1 și 2:

$$v'_2 = v_1; \quad \omega_2 = \frac{v'_2}{r_2} = \frac{v_2}{R_2} \Rightarrow \omega_2 = \frac{v_1}{R} = \frac{v_2}{2R} \Rightarrow \begin{cases} \omega_2 = \frac{v_1}{R} \\ v_2 = 2v_1 \end{cases} \quad (a)$$

Pentru corpul 3:

$$v'_3 = v_2 = 2v_1; \quad \omega_3 = \frac{v'_3}{2R_3} = \frac{v_3}{R_3} \Rightarrow \omega_3 = \frac{v'_3}{4R} = \frac{v_3}{2R} \Rightarrow \begin{cases} v_3 = v_1 \\ \omega_3 = \frac{v_1}{2R} \end{cases} \quad (b)$$

Rezultatele analizei cinematice se trec în tabelul următor:

Corpul și tipul mișcării	Deplasarea	Viteza	Accelerația	Deplasarea virtuală
(1) Translație	$h_1$	$v_1$	$a_1$	$\delta h_1$
(2) Rotație	$\varphi_2 = \frac{h_1}{R}$	$\omega_2 = \frac{v_1}{R}$	$\varepsilon_2 = \frac{a_1}{R}$	$\delta\varphi_2 = \frac{\delta h_1}{R}$
(3) Plan-paralelă	$h_3 = h_1$	$v_3 = v_1$	$a_3 = a_1$	$\delta h_3 = \delta h_1$
	$\varphi_3 = \frac{h_1}{2R}$	$\omega_3 = \frac{v_1}{2R}$	$\varepsilon_3 = \frac{a_1}{2R}$	$\delta\varphi_3 = \frac{\delta h_1}{2R}$

Aplicând teorema de variație a energiei cinetice pentru întregul sistem de corpuri, sub forma:  $dE = dL$  (c)

unde energia cinetică totală  $E$  este suma energiilor cinetice ale celor trei corpuri:

$$E = E_1 + E_2 + E_3$$

unde:  $E_1 = \frac{1}{2} M_1 v_1^2 = \frac{1}{2} \frac{4G}{g} v_1^2 = \frac{2G}{g} v_1^2$

$$E_2 = \frac{1}{2} J_2 \omega_2^2 = \frac{1}{2} \frac{M_2 R_2^2}{2} \omega_2^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{4G}{2g} 4R^2 \frac{v_1^2}{R^2} = \frac{4G}{g} v_1^2 \quad (d)$$

$$E_3 = \frac{1}{2} M_3 v_3^2 + \frac{1}{2} J_3 \omega_3^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{16G}{g} v_1^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{16G}{2g} 4R^2 \frac{v_1^2}{4R^2} = \frac{12G}{g} v_1^2$$

Prin urmare:  $E = 18 \frac{G}{g} v_1^2 \quad \Rightarrow dE = 36 \frac{G}{g} a_1 v_1 dt$  (e)

Lucrul mecanic total al forțelor sistemului, conform fig. 13.8.b, este:

$$L = L_1 + L_2 + L_3$$

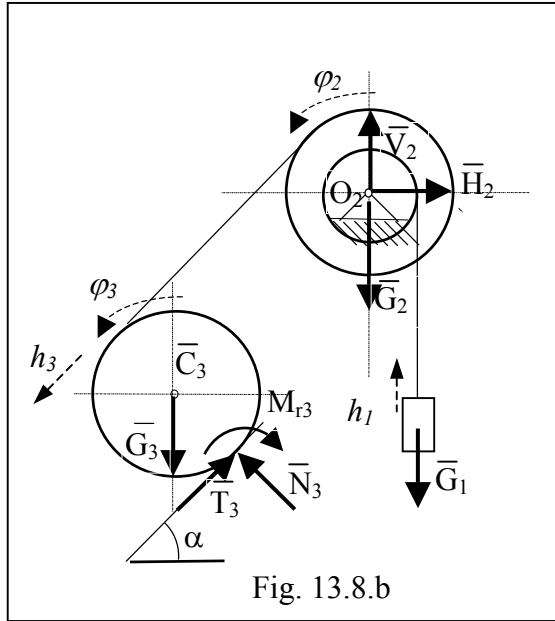


Fig. 13.8.b

unde:

$$L_1 = -G_1 h_1 = -4G h_1$$

$$L_2 = 0$$

$$L_3 = G_3 \sin \alpha \cdot h_3 - M_{r3} \varphi_3$$

$$L_3 = G \left( 16 \sin \alpha - \frac{8s}{R} \cos \alpha \right) h_1$$

unde:  $M_{r3} = sN_3$

Prin urmare:

$$L = 4G \left( 4 \sin \alpha - \frac{2s}{R} \cos \alpha - 1 \right) h_1 \quad (f)$$

$$\Rightarrow dL = 4G \left( 4 \sin \alpha - \frac{2s}{R} \cos \alpha - 1 \right) v_1 dt$$

Înlocuind în teorema energiei cinetice (3) expresiile lui  $dE$  și  $dL$  se obține accelerația corpului (1):  $a_1 = \frac{1}{9} \left( 4 \sin \alpha - \frac{2s}{R} \cos \alpha - 1 \right) g$  (g)

Prin integrare succesivă se obține viteza  $v_1$  și respectiv deplasarea  $h_1$ .

### 2) Calculul reacțiunilor

Se speră corpurile și se înlocuiesc legăturile cu forțe de legătură, fiecare corp fiind acționat atât de forțe efective aplicate (active) cât și de forțe de legătură (reacțiuni); se scriu teorema impulsului, respectiv teorema momentului cinetic, pentru fiecare corp separat:

a. Pentru corpul (1) se scrie teorema impulsului (fig. 13.8.c):

$$\frac{G_1}{g} a_1 = S_1 - G_1 \quad (h)$$

Înlocuind valorile se obține:

$$S_1 = \frac{8G}{9} \left( 4 + 2 \sin \alpha - \frac{s}{R} \cos \alpha \right) \quad (i)$$

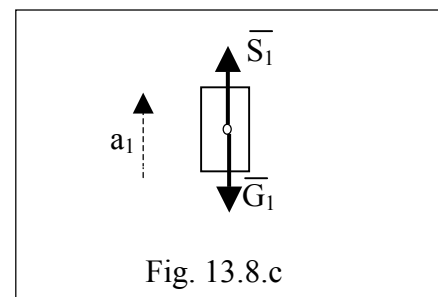


Fig. 13.8.c

b. Pentru corpul (2) se scrie atât teorema impulsului cât și teorema momentului cinetic față de centrul maselor  $O_2$  (fig. 13.8.d):

$$\begin{cases} 0 = H_2 - S_2 \cos \alpha \\ 0 = V_2 - S_2 \sin \alpha - G_2 - S_1 \\ J_2 \varepsilon_2 = S_2 \cdot 2R - S_1 \cdot R \end{cases} \quad (j)$$

Făcând înlocuirile și calculele se obține:

$$S_2 = \frac{4G}{3} \left( 2 \sin \alpha - \frac{s}{R} \cos \alpha + 1 \right) \quad (k)$$

$$H_2 = S_2 \cos \alpha; \quad V_2 = S_2 \sin \alpha + G_2 + S_1$$

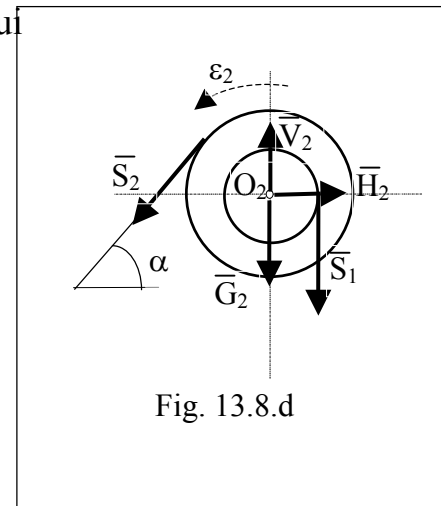


Fig. 13.8.d

c. Pentru corpul (3) se scrie atât teorema impulsului cât și teorema momentului cinetic față de centrul maselor  $C_3$  (fig. 13.8.e):

$$\begin{cases} \frac{G_3}{g} a_3 = -S_2 - T_3 + G_3 \sin \alpha \\ 0 = N_3 - G_3 \cos \alpha \\ J_3 \varepsilon_3 = -S_2 \cdot 2R + T_3 \cdot 2R - M_{r3} \end{cases} \quad (k)$$

$$M_{r3} = sN_3 \quad (l)$$

Făcând înlocuirile și calculele se obține:

$$N_3 = 16G \cos \alpha$$

$$M_{r3} = 16G \cdot s \cdot \cos \alpha \quad (m)$$

$$T_3 = \frac{4G}{9} \left( 14 \sin \alpha + 11 \frac{s}{R} \cos \alpha + 1 \right)$$

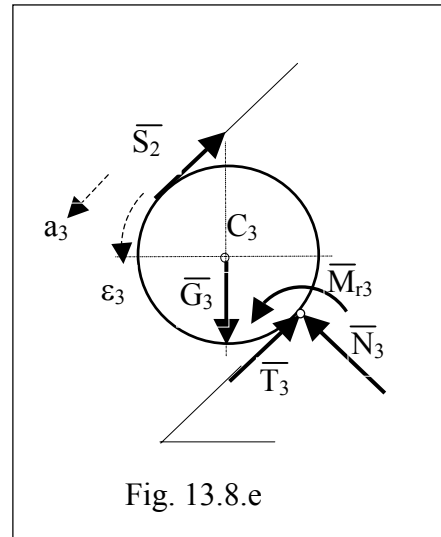


Fig. 13.8.e

Ultima ecuație din cele trei ecuații (k) este pentru verificare.

**Observații:**

- Această problemă este rezolvată și în capitolul XIV folosind principiile mecanicii analitice (problema 14.1.7).
- Dacă se pune condiția de rostogolire fără alunecare a roții 3:  $T_3 \leq \mu N_3$ , rezultă valoarea minimă a coeficientului de frecare pentru acest caz:

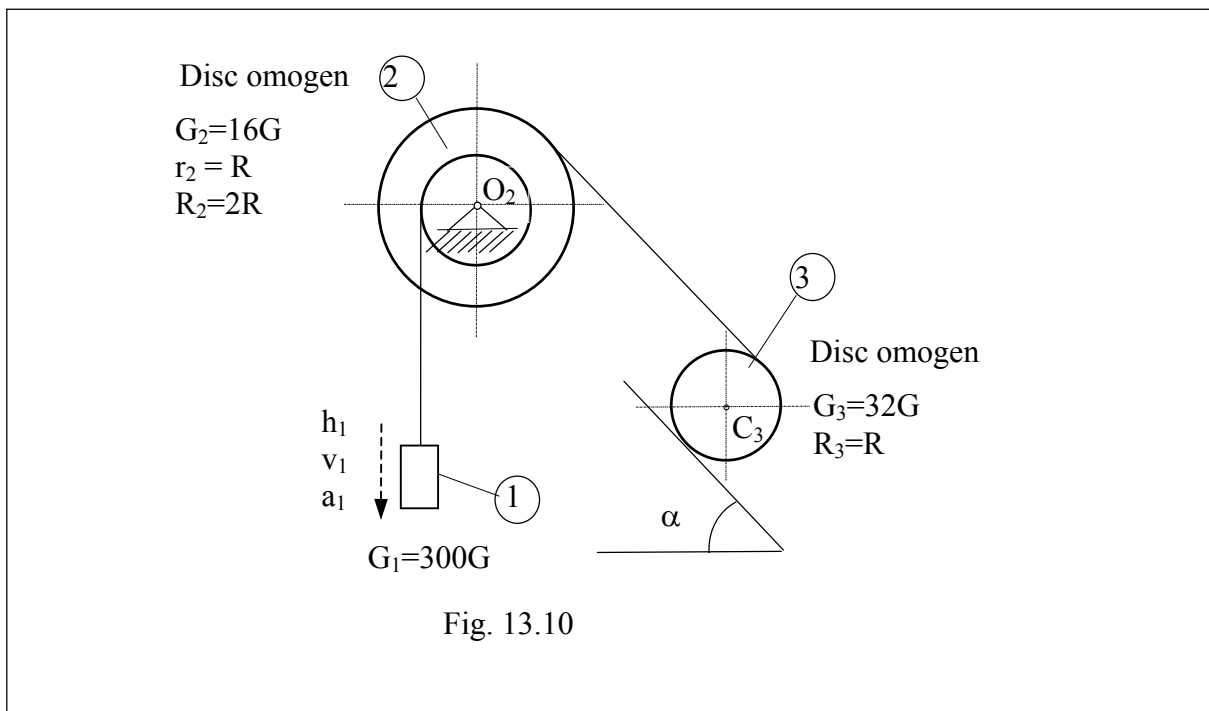
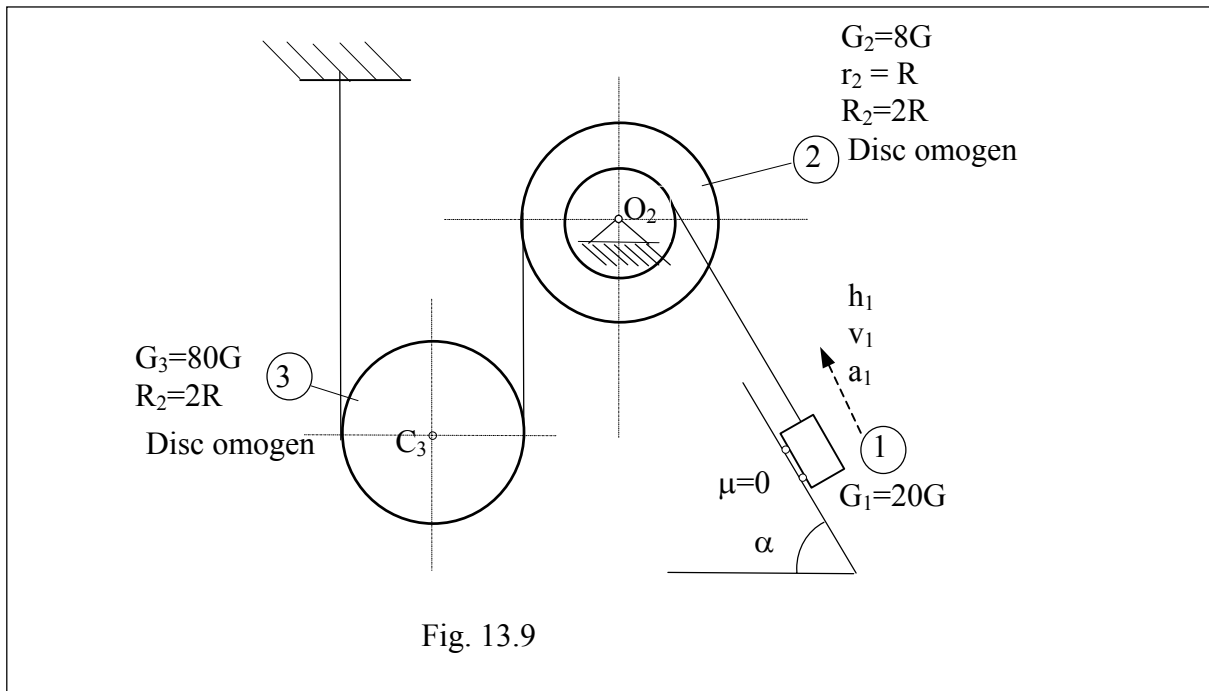
$$\mu \geq \frac{T_3}{N_3} \quad \text{sau} : \quad \mu_{min} = \frac{T_3}{N_3} = \frac{1}{36 \cos \alpha} \left( 14 \sin \alpha + 11 \frac{s}{R} \cos \alpha + 1 \right)$$

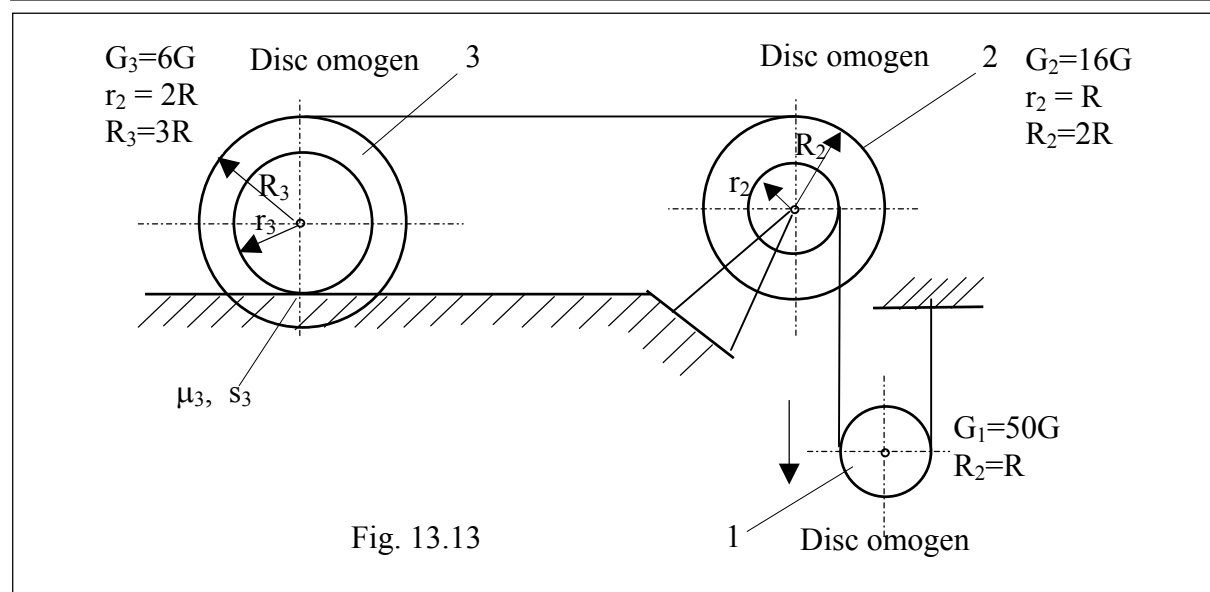
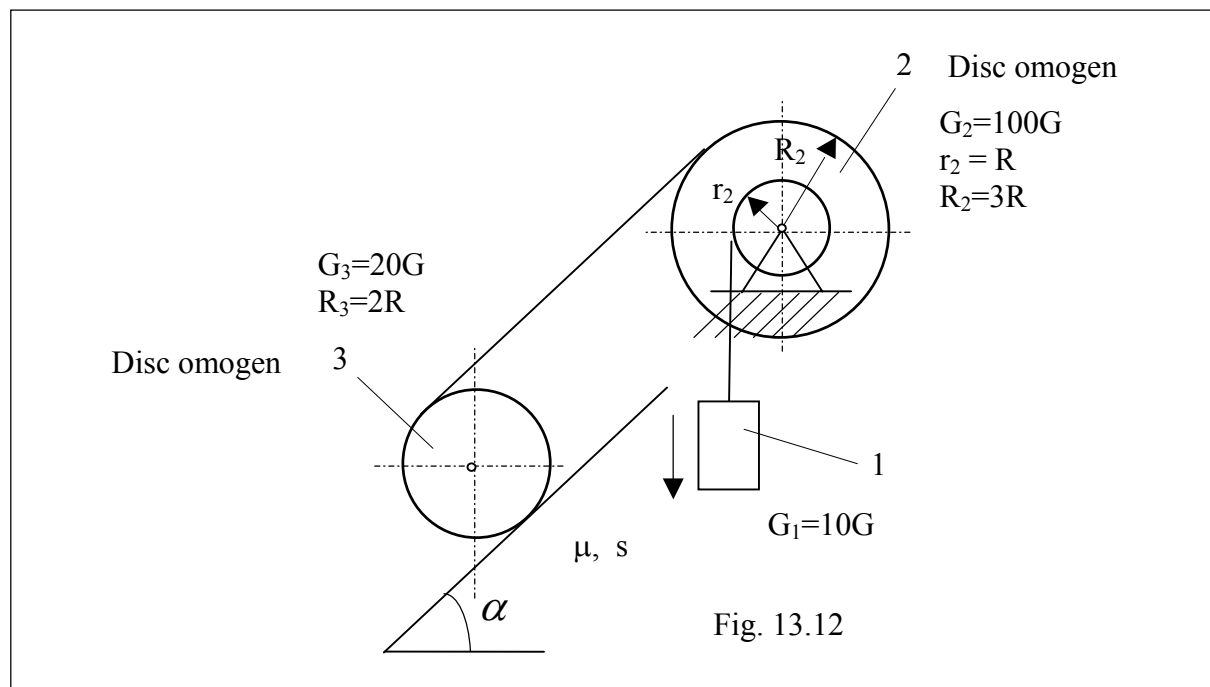
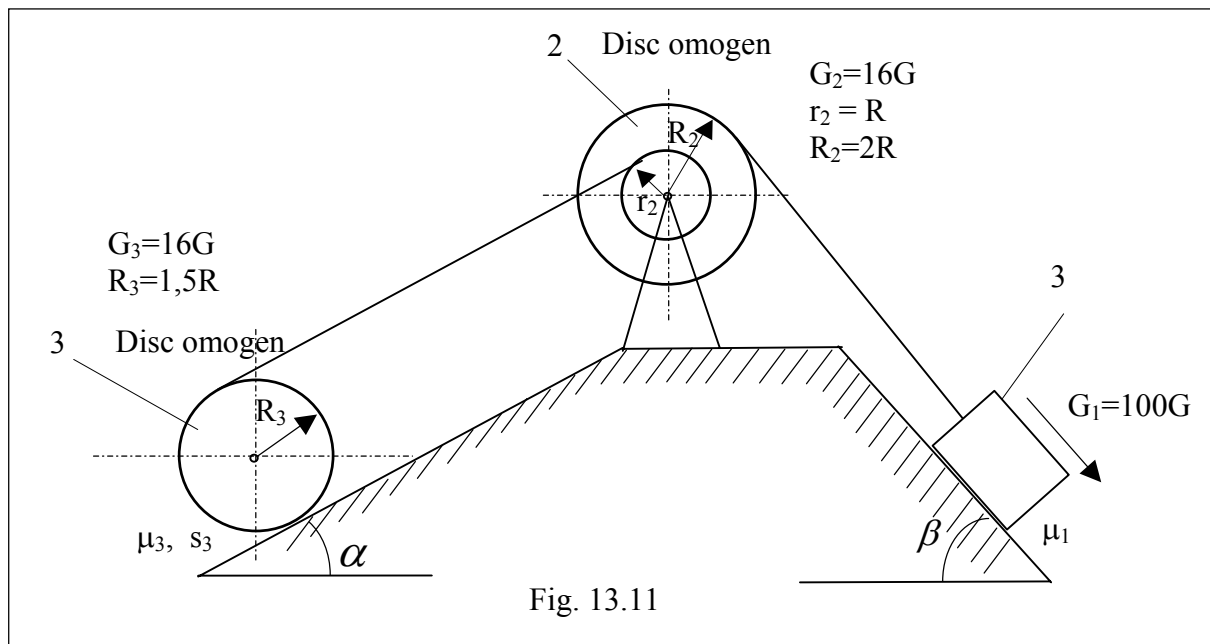
PROBLEME PROPUSE

*Se consideră sistemul de corpuri din figurile 13.9...13.13, în care mărimile  $R$ ,  $G$ ,  $\alpha$ ,  $\mu$ ,  $s$  sunt cunoscute.*

*Se cere:*

- 1) *Să se determine mișcarea sistemului cu ajutorul teoremei de variație a energiei cinetice (parametrii  $h_1$ ,  $v_1$ ,  $a_1$ );*
- 2) *Să se determine forțele de legătură aplicând teoremele impulsului și momentului cinetic pentru fiecare corp din sistem.*





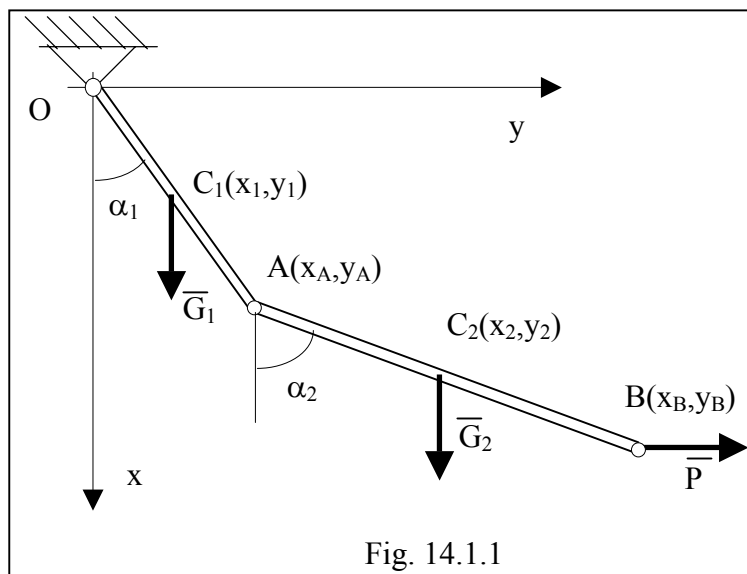


## CAPITOLUL XIV MECANICA ANALITICĂ

### 14.1. PRINCIPIUL LUCRULUI MECANIC VIRTUAL ȘI PRINCIPIUL LUI D'ALEMBERT

#### PROBLEME REZOLVATE

**14.1.1.** *Se consideră sistemul de bare articulate din fig. 14.1.1, în capătul barei AB, acționând o forță orizontală P (se neglijează frecarea din articulații) mărimile  $G_1, G_2, P$  sunt cunoscute. Se dau:  $AB=2\ell, OA=\ell$ . Se cere să se găsească poziția de echilibru a sistemului, folosind principiul lucrului mecanic virtual.*



Rezolvare

Sistemul are două grade de libertate, reprezentate prin unghiurile  $\alpha_1$  și  $\alpha_2$ , care definesc totodată și poziția de echilibru a sistemului.

În acest caz principiul lucrului mecanic virtual (sau principiul deplasărilor virtuale) se scrie astfel:

$$\delta L = \sum \bar{F}_i \delta \bar{r}_i = 0$$

sau în planul xOy al forțelor:

$$\delta L = G_1 \cdot \delta x_1 + G_2 \cdot \delta x_2 + P \cdot \delta y_B = 0 \tag{a}$$

unde deplasările virtuale se scriu:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{\ell}{2} \cos \alpha_1 & \delta x_1 &= -\frac{\ell}{2} \sin \alpha_1 \cdot \delta \alpha_1 \\ x_2 &= \ell \cos \alpha_1 + \ell \cos \alpha_2 & \Rightarrow \delta x_2 &= -\ell \sin \alpha_1 \cdot \delta \alpha_1 - \ell \sin \alpha_2 \cdot \delta \alpha_2 \\ y_B &= \ell \sin \alpha_1 + 2\ell \sin \alpha_2 & \delta y_B &= \ell \cos \alpha_1 \cdot \delta \alpha_1 + 2\ell \cos \alpha_2 \cdot \delta \alpha_2 \end{aligned} \tag{b}$$

Înlocuind în relația (a) și grupând corespunzător termenii se obține:

$$\begin{aligned} \delta L &= \left( -G_1 \frac{\ell}{2} \sin \alpha_1 - G_2 \ell \sin \alpha_1 + P \ell \cos \alpha_1 \right) \delta \alpha_1 + \\ &+ \left( -2G_2 \ell \sin \alpha_2 + 2P \ell \cos \alpha_2 \right) \delta \alpha_2 \end{aligned} \tag{c}$$

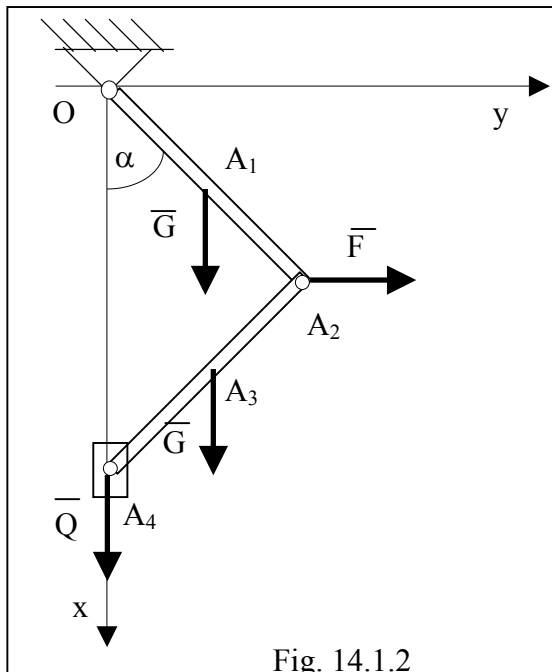
Întrucât deplasările virtuale  $\delta \alpha_1$  și  $\delta \alpha_2$  sunt foarte mici, dar nenule, rezultă că relația (c) este valabilă numai dacă :

$$\begin{cases} -G_1 \frac{\ell}{2} \sin \alpha_1 - G_2 \ell \sin \alpha_1 + P \ell \cos \alpha_1 = 0 \\ -2G_2 \ell \sin \alpha_2 + 2P \ell \cos \alpha_2 = 0 \end{cases} \quad (d)$$

Rezolvând acest sistem se obține poziția de echilibru cerută:

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{2P}{G_1 + 2G_2}; \quad \operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{P}{G_2} \quad (e)$$

**14.1.2. Se consideră** sistemul de bare articulate din fig. 14.1.2, în capătul barei AB, acționând o forță orizontală P (se neglijează frecarea din articulații) mărimile G, Q, α sunt cunoscute. Se dau: OA<sub>2</sub> = A<sub>2</sub>A<sub>4</sub> = 2ℓ, . **Se cere** se determine mărimea forței F corespunzătoare poziției de echilibru a sistemului din fig. 14.1.2, folosind principiul lucrului mecanic virtual .



### Rezolvare

Principiul lucrului mecanic virtual sau principiul deplasărilor virtuale în acest caz se scrie astfel:

$$\delta L = \sum \bar{F}_i \delta \bar{r}_i = 0$$

sau in plan :

$$\sum X_i \delta x_i + Y_i \delta y_i = 0 \quad (a)$$

Coordonatele punctelor de aplicație ale forțelor exterioare sunt: A<sub>i</sub>(x<sub>i</sub>, y<sub>i</sub>), i=1,2,3,4, iar relația (a) devine:

$$G \delta x_1 + F \delta y_2 + G \delta x_3 + Q \delta x_4 = 0 \quad (b)$$

Deplasările virtuale se exprimă în funcție de datele problemei astfel:

$$\begin{aligned} x_1 &= \ell \cos \alpha & \delta x_1 &= -\ell \sin \alpha \cdot \delta \alpha \\ y_2 &= 2\ell \sin \alpha & \delta y_2 &= 2\ell \cos \alpha \cdot \delta \alpha \\ x_3 &= 3\ell \cos \alpha & \delta x_3 &= -3\ell \sin \alpha \cdot \delta \alpha \\ x_4 &= 4\ell \cos \alpha & \delta x_4 &= -4\ell \sin \alpha \cdot \delta \alpha \end{aligned} \Rightarrow \quad (c)$$

Introducând aceste deplasări în ecuația (b) se obține:

$$(-G \sin \alpha + 2F \cos \alpha - 3G \sin \alpha - 4Q \sin \alpha) \ell \delta \alpha = 0 \quad (d)$$

Întrucât deplasarea virtuală este foarte mică, dar nenulă, rezultă că paranteza trebuie să fie nulă, adică:

$$F = 2(G + Q) \operatorname{tg} \alpha \quad (e)$$

**14.1.3.** *Se consideră sistemul de bare articulate, încastrate și rezemate simplu, asupra căruia acționează: o forță concentrată  $F$ , un cuplu  $M_0$  și o forță distribuită  $q$  ca în fig. 14.1.3 (se neglijează frecarea din articulații). Se dau:  $AB=2a$ ,  $BC=4a$ ,  $CD=3a$   $F=qa$ ,  $M_0=qa^2$ . **Se cer** reacțiunile:  $V_A$ ,  $M_A$ ,  $V_1$  și  $V_2$  folosind principiul lucrului mecanic virtual.*

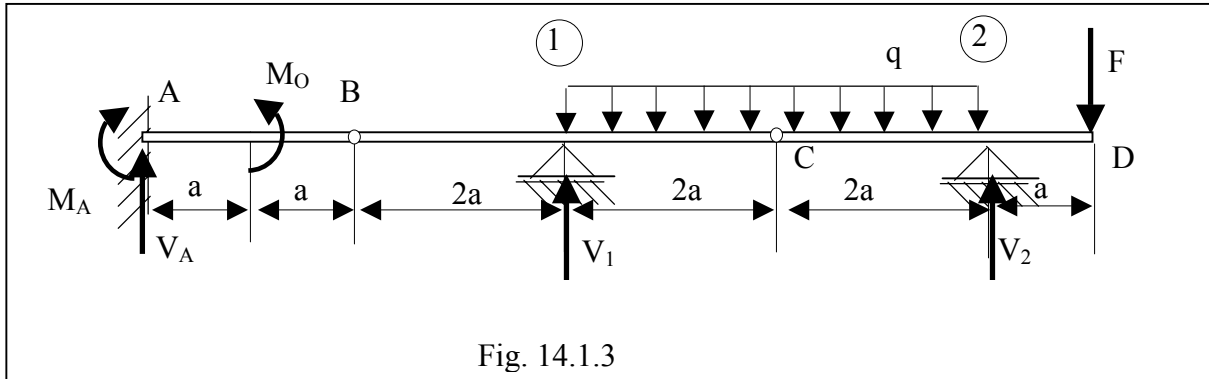


Fig. 14.1.3

**Rezolvare**

Pentru calculul reacțiunilor se suprimă legătura corespunzătoare, se introduce o reacțiune necunoscută, se aplică apoi sistemului o deplasare virtuală compatibilă cu celelalte legături și se exprimă lucrul mecanic al celorlalte forțe corespunzător acestei deplasări virtuale, care conform principiului lucrului mecanic virtual trebuie să fie nul.

- a. Astfel, pentru calculul reacțiunii  $M_A$ , se suprimă legătura corespunzătoare (încastrarea care împiedică rotirea, înlocuindu-se cu o articulație). Se aplică o deplasare virtuală  $\delta\theta_A$  compatibilă cu celelalte legături rămase (Fig. 14.1.3.a) și se înlocuiește efectul forței distribuite cu două forțe concentrate  $2aq$ .

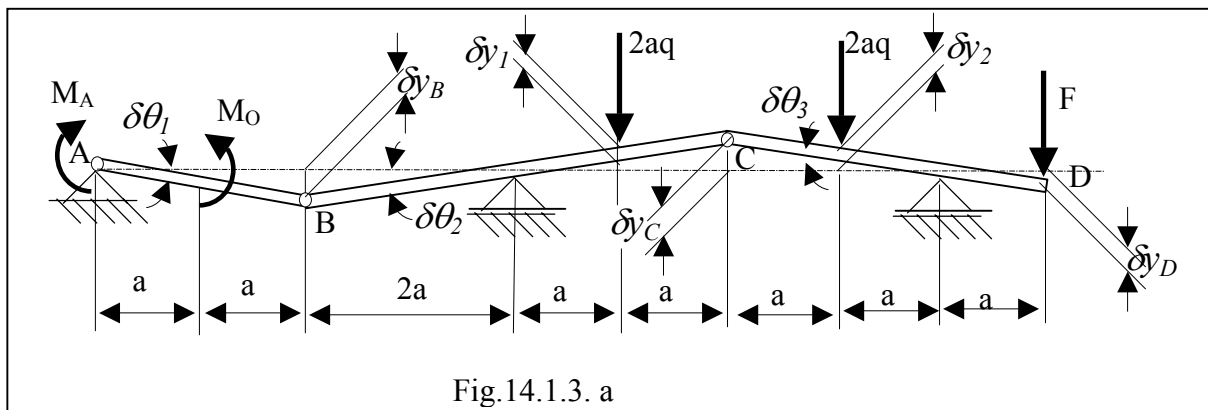


Fig.14.1.3. a

Lucrul mecanic virtual corespunzător acestor deplasări este:

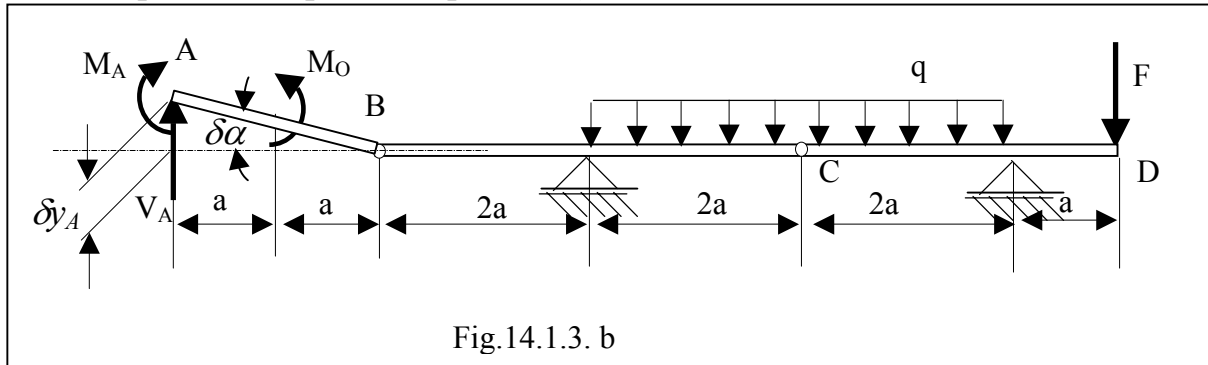
$$\delta L = M_A \cdot \delta\theta_A - M_0 \cdot \delta\theta_A - 2aq\delta y_1 - 2aq\delta y_2 + F \cdot \delta y_D = 0 \tag{a}$$

Din fig. 14.1.3.a se observă că între deplasările virtuale există relațiile:

$$\begin{aligned} \text{tg}\delta\theta_1 &= \frac{\delta y_B}{2a} \cong \delta\theta_1; & \text{tg}\delta\theta_2 &= \frac{\delta y_B}{2a} = \frac{\delta y_1}{a} = \frac{\delta y_C}{2a} \cong \delta\theta_2; \\ \text{tg}\delta\theta_3 &= \frac{\delta y_C}{2a} = \frac{\delta y_2}{a} = \frac{\delta y_D}{a} \cong \delta\theta_3; \end{aligned} \tag{b}$$

care introduse în (a) conduc la:  $\delta L = (M_A - M_0 - 2a^2q - 2a^2q + F \cdot a) \cdot \delta\theta_A = 0$   
 de unde rezultă:  $M_A = 4a^2q$  (c)

b. Pentru calculul reacțiunii  $V_A$  se suprimă complet legătura corespunzătoare (încastrarea) și se aplică o deplasare virtuală  $\delta y_A$  compatibilă cu celelalte legături rămase (fig. 14.1.3.b.) luându-se în considerare și reacțiunea  $M_A$  (ca un cuplu direct aplicat asupra barei).



Lucrul mecanic virtual corespunzător acestei deplasări este:

$$\delta L = M_A \cdot \delta\alpha - M_0 \cdot \delta\alpha + V_A \cdot \delta y_A = 0 \quad (d)$$

Din fig. 14.1.3.b se observă că între cele două deplasări virtuale există relația:  $\text{tg}\delta\alpha = \frac{\delta y_A}{a} \cong \delta\alpha$ , deci relația (d) devine:

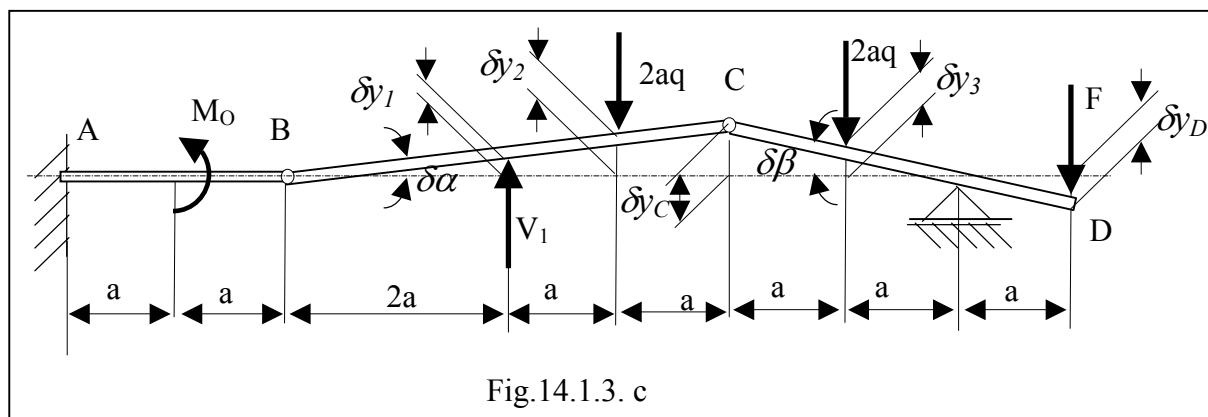
$$\delta L = \left( \frac{M_A}{a} - \frac{M_0}{a} + V_A \right) \cdot \delta y_A = 0 \text{ de unde rezultă: } V_A = -\frac{3}{2}qa \quad (e)$$

c. Pentru calculul reacțiunii  $V_1$ , se suprimă legătura corespunzătoare (reazemul simplu 1) și se aplică o deplasare virtuală  $\delta y_1$  compatibilă cu celelalte legături rămase (Fig. 14.1.3.c.)

Lucrul mecanic virtual corespunzător acestei deplasări este:

$$\delta L = V_1 \cdot \delta y_1 - 2aq\delta y_2 - 2aq\delta y_3 + F \cdot \delta y_D = 0 \quad (f)$$

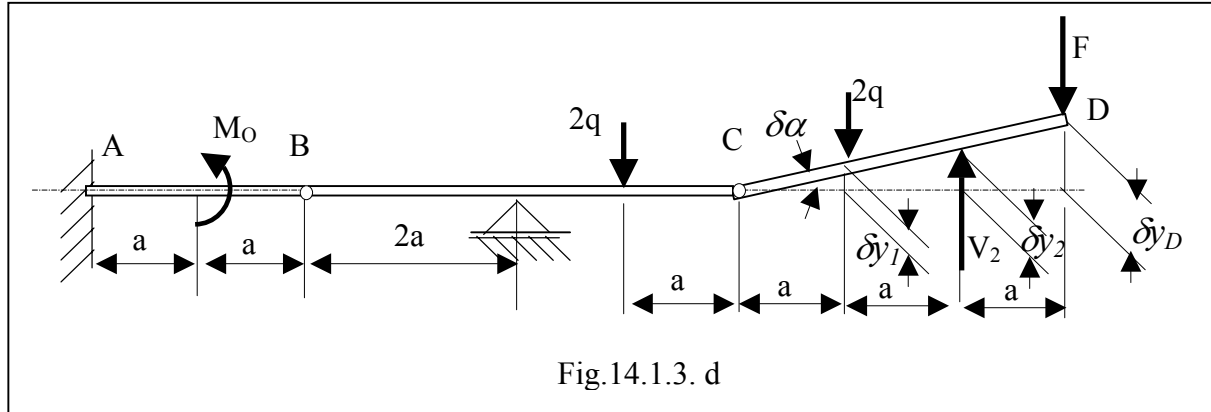
Din fig. 14.1.3.c se observă că între cele patru deplasări virtuale există relațiile:  $\text{tg}\delta\alpha = \frac{\delta y_1}{2a} = \frac{\delta y_2}{3a} = \frac{\delta y_C}{4a} \cong \delta\alpha$ ;  $\text{tg}\delta\beta = \frac{\delta y_3}{a} = \frac{\delta y_D}{a} = \frac{\delta y_C}{2a} \cong \delta\beta$



deci relația (f) devine: 
$$\delta L = \left( V_1 - 2aq \cdot \frac{3}{2} - 2aq + F \right) \cdot \delta y_1 = 0$$

de unde rezultă  $V_1 = 4qa$  (g)

- d. Pentru calculul reacțiunii  $V_2$  se suprimă legătura corespunzătoare (reazemul simplu 2) și se aplică o deplasare virtuală  $\delta y_2$  compatibilă cu celelalte legături rămase (Fig. 14.1.3.d.)



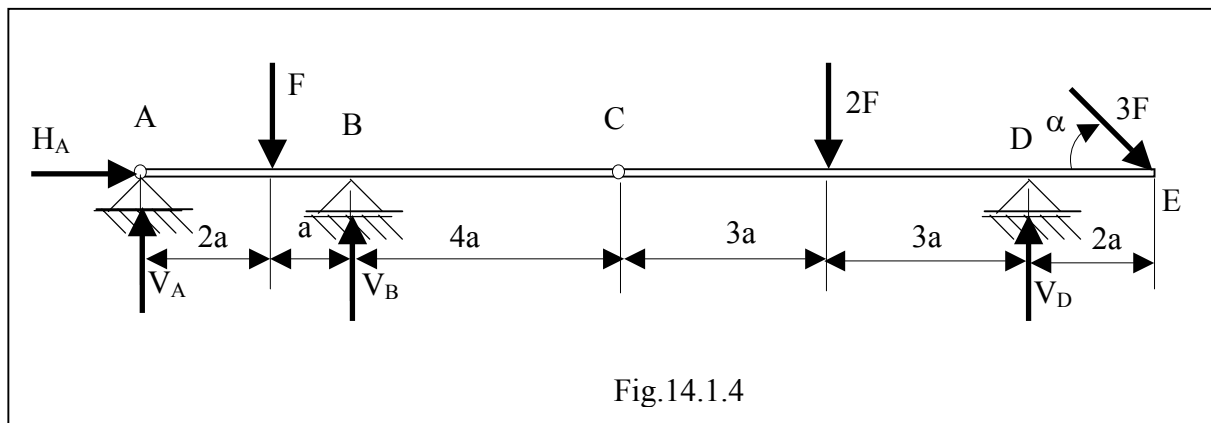
Lucrul mecanic virtual corespunzător acestei deplasări este:

$$\delta L = -2aq \cdot \delta y_1 + V_1 \cdot \delta y_2 - F \cdot \delta y_D = 0 \quad (h)$$

Din fig. 14.1.3.d se observă că între cele trei deplasări virtuale există relațiile:  $\text{tg} \delta \alpha = \frac{\delta y_1}{a} = \frac{\delta y_2}{2a} = \frac{\delta y_D}{3a} \cong \delta \alpha$ , deci relația (h) devine:

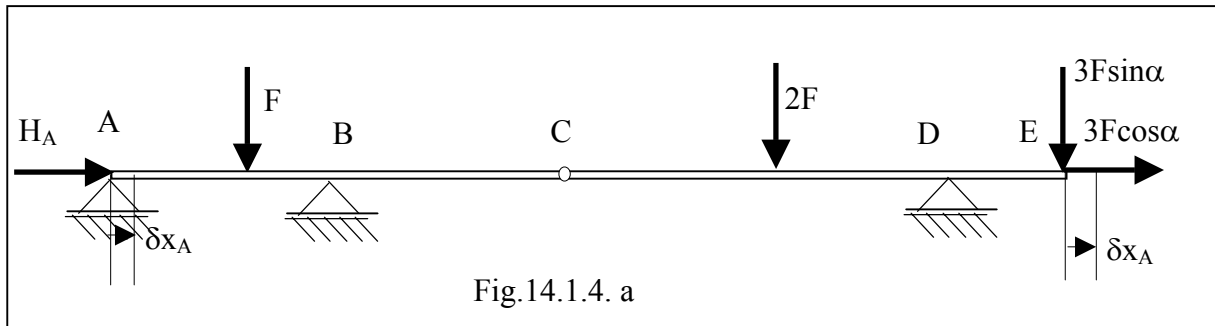
$$\delta L = \left( -2qa \cdot \frac{1}{2} + V_1 - F \cdot \frac{3}{2} \right) \cdot \delta y_2 = 0 \quad \text{de unde rezultă: } V_A = \frac{5}{2} qa \quad (i)$$

**14.1.4. Se consideră sistemul de bare articulate și rezemate simplu, asupra căruia acționează trei forțe concentrate ca în fig. 14.1.4 (se neglijează frecarea din articulații). Se dau:  $AC=7a$ ,  $CE=8a$ . Se cer reacțiunile:  $V_A$ ,  $H_A$ ,  $V_B$  și  $V_D$  folosind principiul lucrului mecanic virtual.**



**Rezolvare**

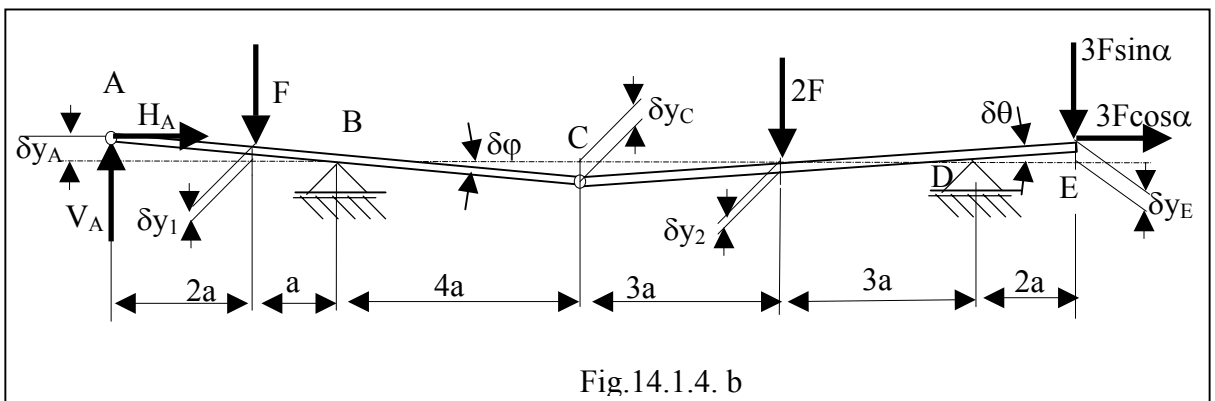
Se suprimă legătura corespunzătoare, se introduce reacțiunea necunoscută și se aplică apoi sistemului o deplasare virtuală compatibilă cu celelalte legături, în funcție de care se exprimă lucrul mecanic al celorlalte forțe (care conform principiului lucrului mecanic virtual trebuie să fie nul).



- a. Pentru a determina reacțiunea  $H_A$  se suprimă legătura corespunzătoare din A (din articulație devine reazem) și se aplică sistemului o deplasare virtuală  $\delta x_A$  compatibilă cu legăturile rămase (fig. 14.1.4.a) Lucrul mecanic al forțelor cu deplasarea virtuală  $\delta x_A$  se scrie:

$$\delta L = (H_A + 3F \cos \alpha) \cdot \delta x_A = 0$$

$$\Rightarrow H_A = -3F \cos \alpha \tag{a}$$



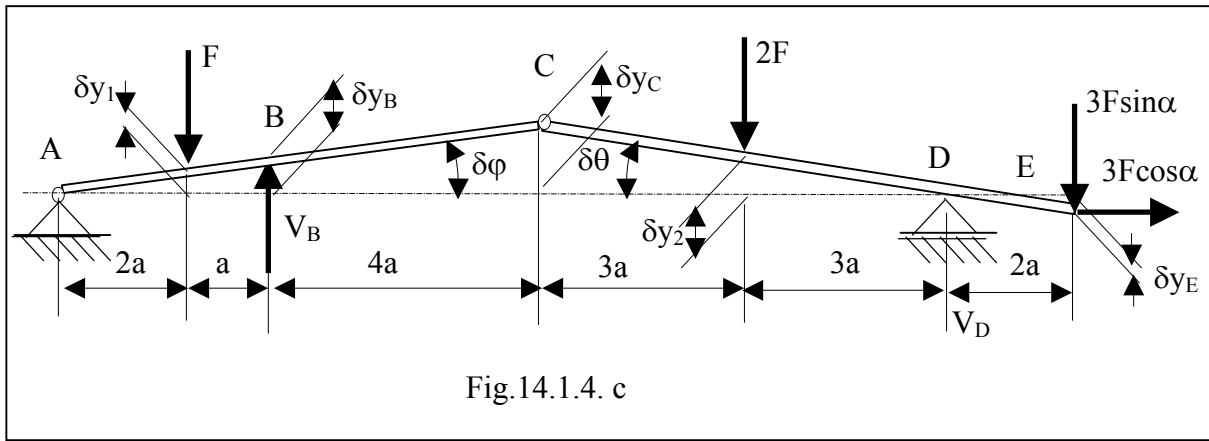
- b. Pentru a determina reacțiunea  $V_A$  se suprimă complet legătura corespunzătoare din A și se aplică sistemului o deplasare virtuală  $\delta y_A$  compatibilă cu legăturile rămase (fig. 14.1.4.b) Lucrul mecanic virtual al forțelor cu deplasările virtuale corespunzătoare se scrie:

$$\delta L = V_A \cdot \delta y_A - F \cdot \delta y_1 + 2F \cdot \delta y_2 - 3F \sin \alpha \cdot \delta y_E = 0 \tag{b}$$

Din fig. 14.1.4.b se observă că între cele patru deplasări virtuale există relațiile:  $tg \delta \varphi = \frac{\delta y_A}{3a} = \frac{\delta y_1}{a} = \frac{\delta y_C}{4a} \cong \delta \varphi$ ;  $tg \delta \theta = \frac{\delta y_2}{3a} = \frac{\delta y_E}{2a} = \frac{\delta y_C}{6a} \cong \delta \theta$ ,

deci relația (b) devine:

$$\delta L = \left( V_A - F \cdot \frac{1}{3} + 2F \cdot \frac{2}{3} - 3F \sin \alpha \cdot \frac{4}{9} \right) \cdot \delta y_A = 0 \Rightarrow V_A = \frac{4 \sin \alpha - 3}{3} F \tag{c}$$



c. Pentru a determina reacțiunea  $V_B$  se suprimă complet legătura corespunzătoare din B și se aplică sistemului o deplasare virtuală  $\delta y_B$  compatibilă cu legăturile rămase (fig. 14.1.4.c) Lucrul mecanic virtual al forțelor cu deplasările vituale corespunzătoare se scrie:

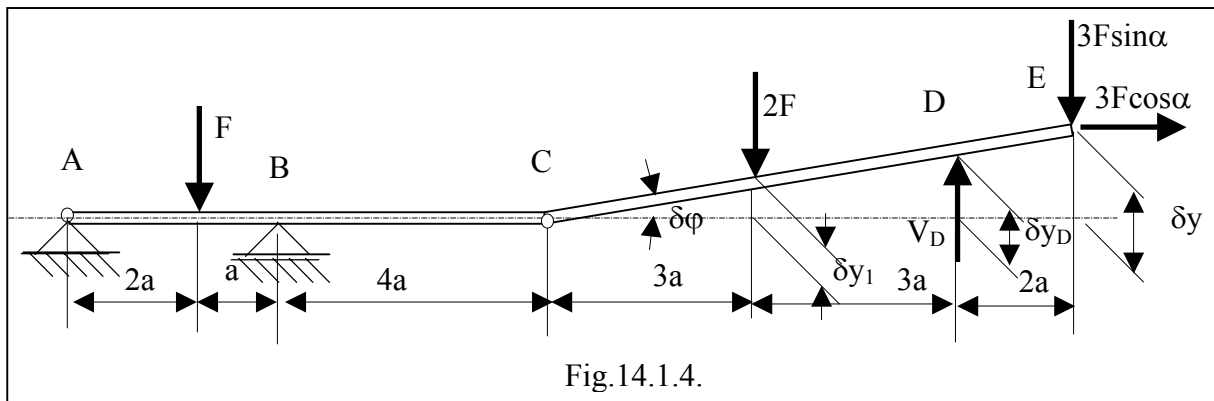
$$\delta L = V_B \cdot \delta y_B - F \cdot \delta y_1 - 2F \cdot \delta y_2 + 3F \sin \alpha \cdot \delta y_E = 0 \quad (d)$$

Din fig. 14.4.c se observă că între cele patru deplasări virtuale există relațiile:

$$tg \delta \varphi = \frac{\delta y_B}{3a} = \frac{\delta y_1}{2a} = \frac{\delta y_C}{7a} \cong \delta \varphi; \quad tg \delta \theta = \frac{\delta y_2}{3a} = \frac{\delta y_E}{2a} = \frac{\delta y_C}{6a} \cong \delta \theta,$$

deci relația (d) devine:

$$\delta L = \left( V_B - F \cdot \frac{2}{3} - 2F \cdot \frac{7}{6} + 3F \sin \alpha \cdot \frac{7}{9} \right) \cdot \delta y_B = 0 \Rightarrow V_B = \frac{9 - 7 \sin \alpha}{3} F \quad (e)$$



d. Pentru a determina reacțiunea  $V_D$  se suprimă complet legătura corespunzătoare din D și se aplică sistemului o deplasare virtuală  $\delta y_D$  compatibilă cu legăturile rămase (fig. 14.1.4.d) Lucrul mecanic virtual al forțelor cu deplasările vituale corespunzătoare se scrie:

$$\delta L = V_D \cdot \delta y_D - 2F \cdot \delta y_1 - 3F \sin \alpha \cdot \delta y_E = 0 \quad (f)$$

Din fig. 14.4.d se observă că între cele patru deplasări virtuale există relațiile:

$$tg \delta \varphi = \frac{\delta y_1}{3a} = \frac{\delta y_D}{6a} = \frac{\delta y_E}{8a} \cong \delta \varphi; \quad , \quad \text{deci relația (f) devine:}$$

$$\delta L = \left( V_D - 2F \cdot \frac{3}{6} - 3F \sin \alpha \cdot \frac{8}{6} \right) \cdot \delta y_D = 0 \Rightarrow V_D = (1 + 4 \sin \alpha) F \quad (g)$$

**14.1.5. Se consideră** sistemul format dintr-un troliu de raze  $R$  și  $r$ , de greutate  $G_3$  pe circumferințele troluiului fiind înfășurate două fire inextensibile de care sunt prinse două greutateți  $G_1$  și  $G_2$  (fig. 14.1.5). Presupunem că troluiul este omogen de rază  $R$  și că se neglijează frecările. Sistemul este lăsat liber plecând din repaus. **Se cere** legea de mișcare a sistemului și tensiunile din cele două fire folosind principiile lucrului mecanic virtual și al lui D'Alembert.

**Rezolvare**

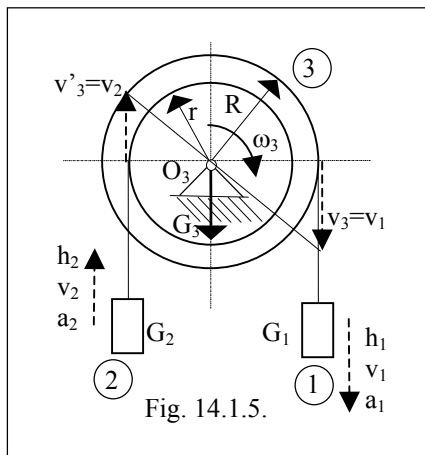


Fig. 14.1.5.

Această problemă a fost rezolvată la capitolul anterior folosind teoremele generale ale dinamicii: teorema de variație a energiei cinetice și teoremele impulsului și momentului cinetic.

Aici se vor folosi *principiul lucrului mecanic virtual* pentru determinarea mișcării și *principiul lui D'Alembert* pentru determinarea tensiunilor din fire.

Se face o analiză cinematică a mișcării celor două corpuri ale sistemului (2 și 3) în funcție de mișcarea corpului 1, conform tabelului de mai jos.

Corpul și tipul mișcării	Deplasarea	Viteza	Accelerația	Deplasarea virtuală
(1) Translație	$h_1$	$v_1$	$a_1$	$\delta h_1$
(2) Translație	$h_2 = \frac{r h_1}{R}$	$v_2 = \frac{r v_1}{R}$	$a_2 = \frac{r a_1}{R}$	$\delta h_2 = \frac{r \delta h_1}{R}$
(3) Rotație	$\varphi_3 = \frac{h_1}{R}$	$\omega_3 = \frac{v_1}{R}$	$\varepsilon_3 = \frac{a_1}{R}$	$\delta \varphi_3 = \frac{\delta h_1}{R}$

Principiul lucrului mecanic virtual postulează că lucrul mecanic al tuturor forțelor (direct aplicate, de legătură și de inerție) pentru toate cele trei corpuri ale sistemului, este nul:  $\delta L = \delta L_1 + \delta L_2 + \delta L_3 = 0$  (a)

unde (vezi și figurile 14.1.5.a,b,c):

$$\delta L_1 = (G_1 - F_{11}) \cdot \delta h_1; \quad \delta L_2 = (-G_2 - F_{12}) \cdot \delta h_2; \quad \delta L_3 = -M_{I3} \cdot \delta \varphi_3 \quad (b)$$

Forțele și cuplurile de inerție au modulele (fig. 14.5.b):

$$F_{11} = \frac{G_1}{g} a_1; \quad F_{12} = \frac{G_2}{g} a_2 = \frac{G_2}{g} \frac{r}{R} a_1; \quad M_{I3} = J_3 \varepsilon_3 = \frac{G_3 R^2}{2g} \varepsilon_3 = \frac{G_3 R}{2g} a_1 \quad (c)$$

S-a considerat că discul 3 este omogen de rază  $R$  și masă  $G_3/g$  atunci momentul de inerție se scrie:  $J_3 = \frac{G_3 R^2}{2g}$ .

Cu aceste precizări relația (a) se scrie:



$$\delta L = (G_1 - F_{11}) \cdot \delta h_1 + (-G_2 - F_{12}) \cdot \delta h_2 - M_{I3} \cdot \delta \varphi_3 = 0 \quad \text{sau :}$$

$$\delta L = \left( G_1 - \frac{G_1}{g} a_1 \right) \cdot \delta h_1 + \left( -G_2 - \frac{G_2}{g} \frac{r}{R} a_1 \right) \frac{r}{R} \cdot \delta h_1 - \frac{G_3 R}{2g} a_1 \cdot \frac{\delta h_1}{R} = 0$$

$$\text{Rezultă : } \delta L = \left[ \left( G_1 - \frac{r}{R} G_2 \right) - \left( \frac{G_1}{g} + \frac{G_2}{g} \frac{r^2}{R^2} + \frac{G_3}{2g} \right) \cdot a_1 \right] \cdot \delta h_1 = 0 \quad \text{(d)}$$

$$\text{Se obține accelerația: } a_1 = \frac{\left( G_1 - \frac{r}{R} G_2 \right)}{\left( G_1 + \frac{r^2}{R^2} G_2 + \frac{G_3}{2} \right)} g \quad \text{(e)}$$

Pentru determinarea forțelor de legătură prin aplicarea principiului lui *d'Alembert* se separă fiecare corp și se introduc atât forțele direct aplicate și de legătură, cât și forțele/cuplurile de inerție și se scriu ecuațiile de “*echilibru dinamic*”:  $\sum(\bar{F}^a + \bar{F}^{leg} + \bar{F}_I) = 0$ ;  $\sum(\bar{M}^a + \bar{M}^{leg} + \bar{M}_I) = 0$ ; (această metodă se mai numește *metoda cinetostatică*).

a. Pentru corpul (1) (fig. 14.1.5.a):

$$\{-G_1 + S_1 + F_{11} = 0 \quad \text{(f)}$$

unde  $F_{11}$  are expresia dată de (c). Înlocuind se obține:

$$S_1 = G_1 \left( 1 - \frac{a_1}{g} \right) \quad \text{(g)}$$

b. Pentru corpul (2) (fig. 14.1.5.b):

$$\{-G_2 + S_2 - F_{12} = 0 \quad \text{(h)}$$

unde  $F_{12}$  are expresia dată de (c). Înlocuind se obține:

$$S_2 = G_2 \left( 1 + \frac{r}{R} \frac{a_1}{g} \right) \quad \text{(i)}$$

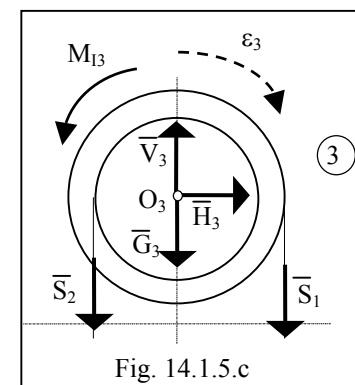
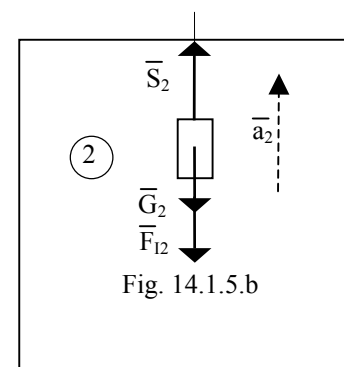
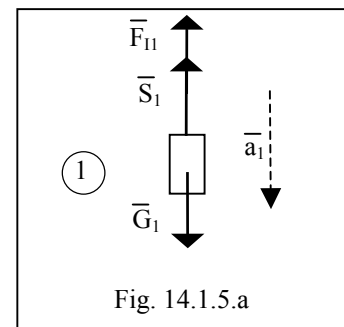
c. Pentru corpul (3) (fig. 14.1.5.c):

$$\begin{cases} 0 = H_3 \\ 0 = V_3 - G_3 - S_1 - S_2 \\ S_1 \cdot R - S_2 \cdot r - M_{I3} = 0 \end{cases} \quad \text{(j)}$$

unde  $M_{I2}$  are expresia dată de (c)

Făcând înlocuirile și calculele se obține:

$$V_3 = G_1 \left( 1 - \frac{a_1}{g} \right) + G_2 \left( 1 + \frac{a_1}{g} \frac{r}{R} \right) + G_3 \quad \text{(k)}$$



**Observație:**

Ultima relație (j) este o relație de verificare, întrucât în aceasta toate mărimile sunt cunoscute. Dacă nu se aplică principiul lucrului mecanic virtual, atunci relațiile obținute prin separarea corpurilor și aplicarea principiului lui D'Alembert sunt suficiente pentru determinarea mișcării și a forțelor de legătură ale sistemului.

**14.1.6. Se consideră** sistemul de corpuri din figură unde mărimile  $R, G, \alpha$ , sunt cunoscute. Corpul (1) coboară pe planul înclinat (se neglijează frecarea de alunecare), având parametrii cinematicii:  $h_1, v_1, a_1$ ; corpul (2) este antrenat prin intermediul unui fir într-o mișcare de rotație (fără frecare în lagărul  $O_2$ ), iar corpul (3) se deplasează într-o mișcare plan-paralelă (fig. 14.1.6) **Se cere:**

- 1) Accleleratia sistemului aplicând principiul lucrului mecanic virtual;
- 2) Să se determine forțele de legătură, aplicând principiul lui d'Alembert

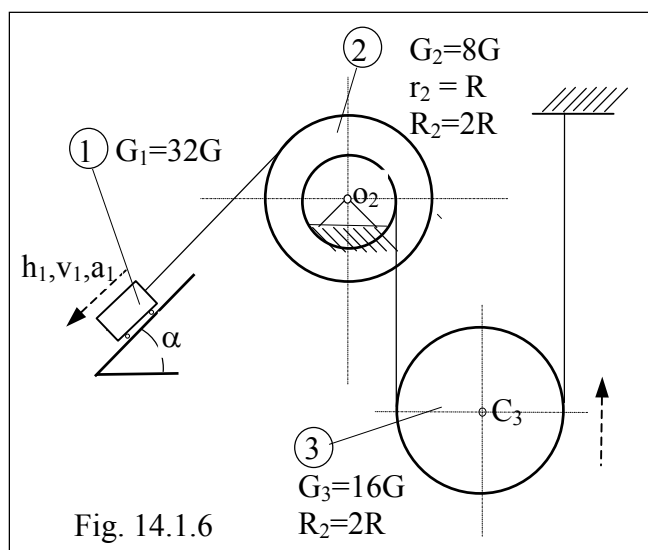


Fig. 14.1.6

**Rezolvare**

1. Pentru rezolvarea problemei este necesară analiza cinematică a mișcării, adică exprimarea parametrilor cinematici ai corpurilor (2) și (3) în funcție de parametrii cinematici ai corpului (1). Se scriu relațiile de lanț cinematic pentru viteze, iar pentru deplasări și accelerații se ține seama de relațiile diferențiale dintre ele (fig. 14.1.6.a)

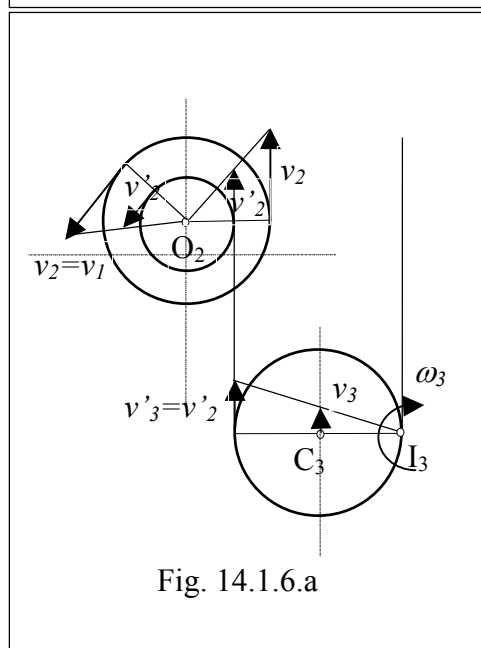


Fig. 14.1.6.a

Pentru corpul 1 și 2:

$$\omega_2 = \frac{v_2}{R_2} = \frac{v'_2}{r_2} \Rightarrow \omega_2 = \frac{v_1}{2R} = \frac{v'_2}{R} \Rightarrow \begin{cases} \omega_2 = \frac{v_1}{2R} \\ v'_2 = \frac{v_1}{2} \end{cases} \quad (a)$$

$$v_2 = v_1$$

Pentru corpul 3

$$\omega_3 = \frac{v'_3}{2R_3} = \frac{v_3}{R_3} \Rightarrow \omega_3 = \frac{v_1}{8R} = \frac{v_3}{2R} \Rightarrow \begin{cases} v_3 = \frac{v_1}{4} \\ \omega_3 = \frac{v_1}{8R} \end{cases} \quad (b)$$

$$v'_3 = v'_2 = \frac{v_1}{2}$$

Rezultatele analizei cinematice se trec în tabelul următor:

Corpul și tipul mișcării	Deplasarea	Viteza	Accelerația	Deplasarea virtuală
(1) Translație	$h_1$	$v_1$	$a_1$	$\delta h_1$
(2) Rotație	$\varphi_2 = \frac{h_1}{2R}$	$\omega_2 = \frac{v_1}{2R}$	$\varepsilon_2 = \frac{a_1}{2R}$	$\delta\varphi_2 = \frac{\delta h_1}{2R}$
(3) Plan-paralelă	$h_3 = \frac{h_1}{4}$	$v_3 = \frac{v_1}{4}$	$a_3 = \frac{a_1}{4}$	$\delta h_3 = \frac{\delta h_1}{4}$
	$\varphi_3 = \frac{h_1}{8R}$	$\omega_3 = \frac{v_1}{8R}$	$\varepsilon_3 = \frac{a_1}{8R}$	$\delta\varphi_3 = \frac{\delta h_1}{8R}$

Principiul lucrului mecanic virtual postulează că lucrul mecanic al tuturor forțelor: direct aplicate, de legătură și de inerție pentru toate cele trei corpuri ale sistemului, este nul:

$$\delta L = \delta L_1 + \delta L_2 + \delta L_3 = 0 \tag{c}$$

unde:

$$\delta L_1 = (G_1 \sin \alpha - F_{11}) \cdot \delta h_1$$

$$\delta L_2 = -M_{12} \cdot \delta\varphi_2 \tag{d}$$

$$\delta L_3 = (-G_3 - F_{13}) \cdot \delta h_3 - M_{13} \cdot \delta\varphi_3$$

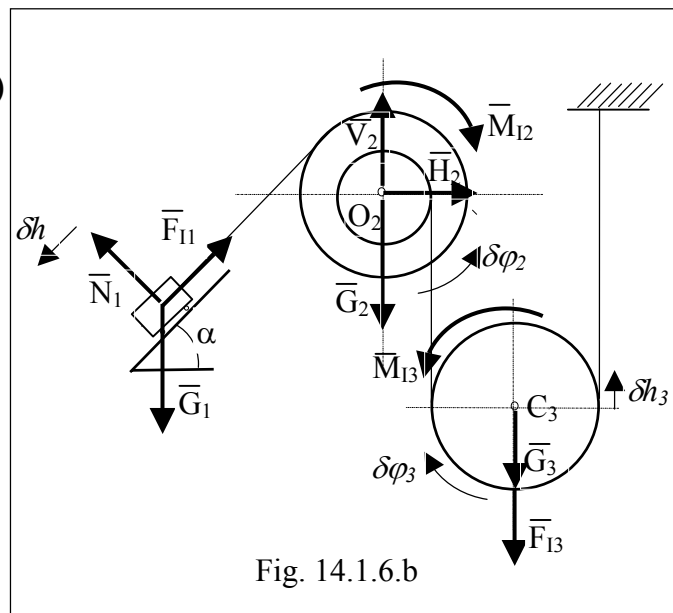
Forțele și cuplurile de inerție au modulele (fig. 14.1.6.b):

$$F_{11} = \frac{G_1}{g} a_1 = \frac{32G}{g} a_1$$

$$M_{12} = J_2 \varepsilon_2 = \frac{G_2 R_2^2}{2g} \varepsilon_2 = \frac{8GR}{g} a_1 \tag{e}$$

$$F_{13} = \frac{G_3}{g} a_3 = \frac{4G}{g} a_1$$

$$M_{13} = J_3 \varepsilon_3 = \frac{G_3 R_3^2}{2g} \varepsilon_3 = \frac{4GR}{g} a_1$$



Dacă se exprimă și deplasările virtuale  $\delta\varphi_2$ ,  $\delta h_3$ ,  $\delta\varphi_3$  în funcție de  $\delta h_1$  expresia (c) devine:

$$\delta L = (G_1 \sin \alpha - F_{11}) \cdot \delta h_1 - M_{12} \cdot \delta\varphi_2 + (-G_3 - F_{13}) \cdot \delta h_3 - M_{13} \cdot \delta\varphi_3 = 0$$

$$\delta L = \left[ G_1 \sin \alpha - F_{11} - M_{12} \cdot \frac{1}{2R} + (-G_3 - F_{13}) \cdot \frac{1}{4} - M_{13} \cdot \frac{1}{8R} \right] \cdot \delta h_1 = 0 \tag{f}$$

Înlocuind în (f) valorile forțelor/cuplurilor de inerție date de relațiile (e) și valorile deplasărilor viruale din tabel se obține:

$$\left[ 4(8 \sin \alpha - 1) - \frac{75}{2g} a_1 \right] \cdot \delta h_1 = 0$$

$$\Rightarrow a_1 = \frac{8(8 \sin \alpha - 1)}{75} g \tag{g}$$

2. Pentru determinarea forțelor de legătură prin aplicarea principiului lui *d'Alembert* se separă fiecare corp și se introduc atât forțele direct aplicate și de legătură, cât și forțele/cuplurile de inerție și se scriu ecuațiile de "echilibru dinamic":  $\sum(\bar{F}^a + \bar{F}^{leg} + \bar{F}_i) = 0$ ;  $\sum(\bar{M}^a + \bar{M}^{leg} + \bar{M}_i) = 0$ ; Această metodă se mai numește *metoda cinetostatică*.

a. Pentru corpul (1) (fig. 14.1.6.c):

$$\begin{cases} -G_1 \sin \alpha + S_1 + F_{11} = 0 \\ -G_1 \cos \alpha + N_1 = 0 \end{cases}$$

unde  $F_{11}$  are expresia dată de (e)

Înlocuind valorile se obține:

$$S_1 = \frac{32G}{75} (11 \sin \alpha + 8)$$

$$N_1 = 32G \cos \alpha$$

b. Pentru corpul (2) (fig. 14.1.6.d):

$$\begin{cases} 0 = H_2 - S_1 \cos \alpha \\ 0 = V_2 - S_1 \sin \alpha - G_2 - S_2 \\ S_1 \cdot 2R - S_2 \cdot R - M_{12} = 0 \end{cases}$$

unde  $M_{12}$  are expresia dată de (e)

Făcând înlocuirile rezultă:

$$S_2 = \frac{64G}{75} (3 \sin \alpha + 9)$$

$$H_2 = S_1 \cos \alpha; \quad V_2 = S_1 \sin \alpha + G_2 + S_2$$

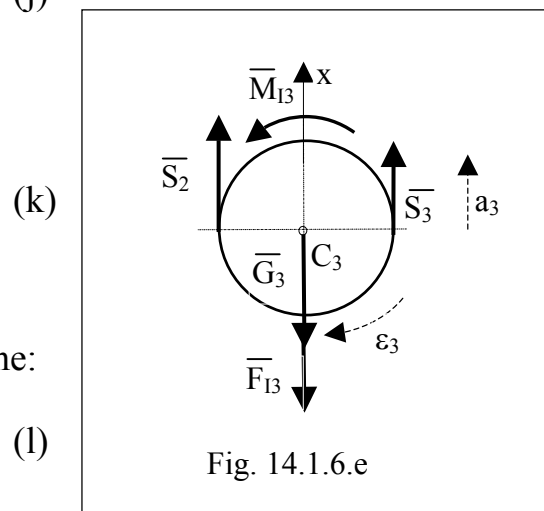
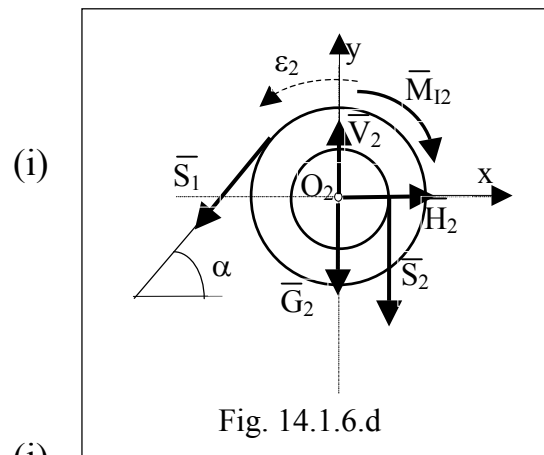
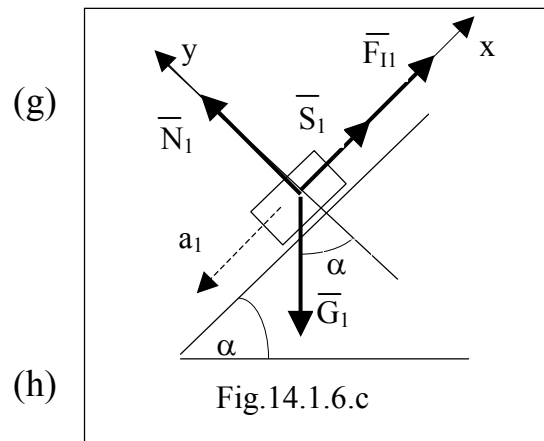
c. Pentru corpul (3) (fig. 14.1.6.e):

$$\begin{cases} S_2 + S_3 - G_3 - F_{13} = 0 \\ S_2 \cdot 2R - S_3 \cdot 2R - M_{13} = 0 \end{cases} \tag{k}$$

unde  $F_{13}$  și  $M_{13}$  au expresiile date de (e)

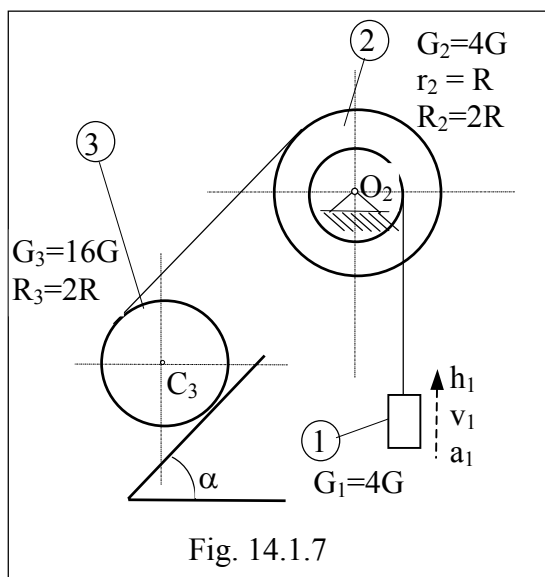
Făcând înlocuirile și calculele se obține:

$$S_3 = \frac{16(4 \sin \alpha + 37)G}{75} \tag{l}$$



**14.1.7. Se consideră** sistemul de corpuri din figură unde mărimile  $R, G, \alpha$ , sunt cunoscute. Roata (3) coboară pe planul înclinat, rostogolindu-se fără alunecare roata (2) este antrenată într-o mișcare de rotație (fără frecare în  $O_2$ ), iar corpul (1) se deplasează în sus având parametrii cinematicii:  $h_1, v_1, a_1$ ; (fig. 14.1.7). **Se cere să se determine**

- 1) accelerația sistemului aplicând principiul lucrului mecanic virtual;
- 2) forțele de legătură, aplicând principiul lui d'Alembert
- 3) valoarea minimă a coeficientului de frecare ca corpul (3) să nu alunece.



**Rezolvare**

1) Pentru rezolvarea problemei este necesară analiza cinematică a mișcării, sau exprimarea parametrilor cinematici ai corpurilor (2) și (3) în funcție de parametrii cinematici ai corpului (1). Se scriu relațiile de lanț cinematic pentru viteze, iar pentru deplasări și accelerații se ține seama de relațiile diferențiale dintre ele (fig. 14.1.7.a)

Pentru corpul 1 și 2:

$$\omega_2 = \frac{v'_2}{R_2} = \frac{v_2}{r_2} \Rightarrow \omega_2 = \frac{v_1}{R} = \frac{v'_2}{2R} \Rightarrow \begin{cases} \omega_2 = \frac{v_1}{R} \\ v'_2 = 2v_1 \end{cases}$$

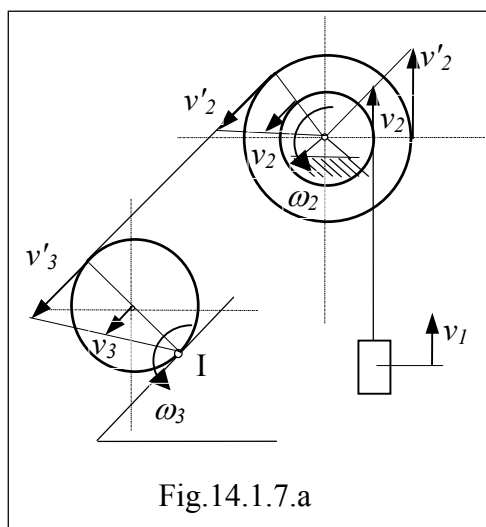
$$v'_2 = v'_3$$

Pentru corpul 3

$$\omega_3 = \frac{v'_3}{2R_3} = \frac{v_3}{R_3} \Rightarrow \omega_3 = \frac{v'_3}{4R} = \frac{v_3}{2R} \Rightarrow \begin{cases} v_3 = v_1 \\ \omega_3 = \frac{v_1}{2R} \end{cases} \quad (a)$$

$$v'_3 = v'_2 = 2v_1$$

Rezultatele analizei cinematice :



Corpul și tipul mișcării	Deplasarea	Viteza	Accelerația	Deplasarea virtuală
(1) Translație	$h_1$	$v_1$	$a_1$	$\delta h_1$
(2) Rotație	$\varphi_2 = \frac{h_1}{R}$	$\omega_2 = \frac{v_1}{R}$	$\varepsilon_2 = \frac{a_1}{R}$	$\delta\varphi_2 = \frac{\delta h_1}{R}$
(3) Plan-paralelă	$h_3 = h_1$	$v_3 = v_1$	$a_3 = a_1$	$\delta h_3 = \delta h_1$
	$\varphi_3 = \frac{h_1}{2R}$	$\omega_3 = \frac{v_1}{2R}$	$\varepsilon_3 = \frac{a_1}{2R}$	$\delta\varphi_3 = \frac{\delta h_1}{2R}$

Principiul lucrului mecanic virtual postulează că lucrul mecanic al tuturor forțelor (direct aplicate, de legătură și de inerție) pentru toate cele trei corpuri ale sistemului, este nul:

$$\delta L = \delta L_1 + \delta L_2 + \delta L_3 = 0 \quad (b)$$

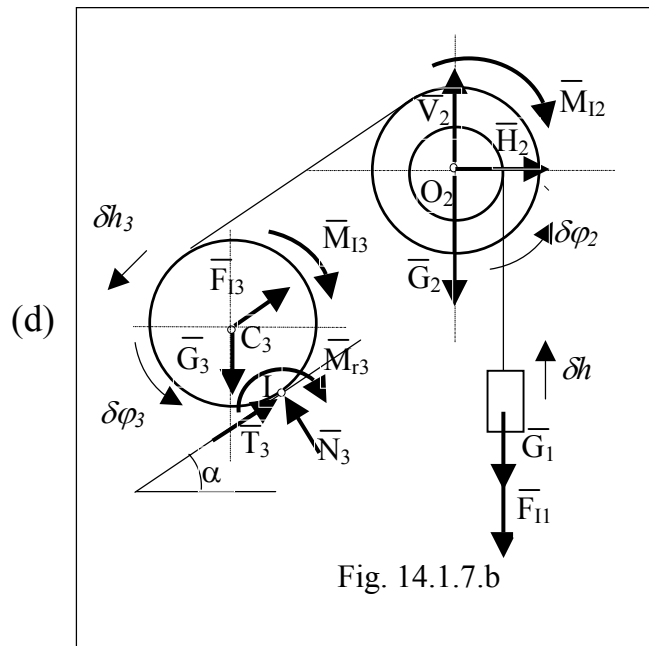
unde:

$$\begin{aligned} \delta L_1 &= (-G_1 - F_{11}) \cdot \delta h_1; & \delta L_2 &= -M_{I2} \cdot \delta \varphi_2 \\ \delta L_3 &= (-G_3 \sin \alpha - F_{I3}) \cdot \delta h_3 + (-M_{I3} - M_{r3}) \cdot \delta \varphi_3 \end{aligned} \quad (c)$$

Forțele și cuplurile de inerție

au modulele:

$$\begin{aligned} F_{I1} &= \frac{G_1}{g} a_1 = \frac{4G}{g} a_1 \\ M_{I2} &= J_2 \varepsilon_2 = \frac{G_2 R_2^2}{2g} \varepsilon_2 = \frac{8GR}{g} a_1 \\ F_{I3} &= \frac{G_3}{g} a_3 = \frac{16G}{g} a_1 \\ M_{I3} &= J_3 \varepsilon_3 = \frac{G_3 R_3^2}{2g} \varepsilon_3 = \frac{16GR}{g} a_1 \end{aligned}$$



Dacă se exprimă și deplasările

virtuale  $\delta \varphi_2$ ,  $\delta h_3$ ,  $\delta \varphi_3$  în funcție de  $\delta h_1$  expresia (b) devine:

$$\begin{aligned} \delta L &= (G_1 - F_{I1}) \cdot \delta h_1 - M_{I2} \cdot \delta \varphi_2 + (-G_3 \sin \alpha - F_{I3}) \cdot \delta h_3 - (M_{I3} + M_{r3}) \cdot \delta \varphi_3 = 0 \\ \delta L &= \left[ G_1 - F_{I1} + M_{I2} \cdot \frac{1}{R} + (-G_3 \sin \alpha - F_{I3}) - (M_{I3} + M_{r3}) \cdot \frac{1}{2R} \right] \cdot \delta h_1 = 0 \end{aligned} \quad (b')$$

Înlocuind în (d) valorile forțelor/cuplurilor de inerție date de relațiile (d) se obține:

$$\begin{aligned} \left[ 4 \sin \alpha - \frac{2s}{R} \cos \alpha - 1 - \frac{9a_1}{g} \right] \cdot \delta h_1 &= 0 \\ \Rightarrow a_1 &= \frac{\left( 4 \sin \alpha - \frac{2s}{R} \cos \alpha - 1 \right)}{9} g \end{aligned} \quad (e)$$

2) Pentru determinarea forțelor de legătură prin aplicarea principiului lui *d'Alembert* se separă fiecare corp și se introduc atât forțele direct aplicate și de legătură, cât și forțele/cuplurile de inerție și se scriu ecuațiile de “*echilibru dinamic*”:  $\sum (\bar{F}^a + \bar{F}^{leg} + \bar{F}_I) = 0$ ;  $\sum (\bar{M}^a + \bar{M}^{leg} + \bar{M}_I) = 0$ ;

a. Pentru corpul (1) (fig. 14.1.7.c):

$$-G_1 + S_1 - F_{11} = 0 \quad (f)$$

unde  $F_{11}$  are expresia (d). Înlocuind se obține:

$$S_1 = \frac{8G}{9} \left( 4 + 2 \sin \alpha - \frac{s}{R} \cos \alpha \right) \quad (g)$$

b. Pentru corpul (2) (fig. 14.1.7.d):

$$\begin{cases} 0 = H_2 - S_2 \cos \alpha \\ 0 = V_2 - S_2 \sin \alpha - G_2 - S_1 \\ S_2 \cdot 2R - S_1 \cdot R - M_{I2} = 0 \end{cases} \quad (h)$$

unde  $M_{I2}$  are expresia (d)

Făcând înlocuirile și calculele se obține:

$$S_2 = \frac{4G}{3} \left( 2 \sin \alpha - \frac{s}{R} \cos \alpha + 1 \right) \quad (i)$$

$$H_2 = S_2 \cos \alpha; V_2 = S_2 \sin \alpha + G_2 + S_1$$

c. Pentru corpul (3) (fig. 14.1.7.e):

$$\begin{cases} -S_2 - T_3 + G_3 \sin \alpha - F_{I3} = 0 \\ N_3 - G_3 \cos \alpha = 0 \\ -S_2 \cdot 2R + T_3 \cdot 2R - M_{I3} - M_{r3} = 0 \end{cases} \quad (j)$$

$$M_{r3} = sN_3; T \leq \mu N_3 \quad (k)$$

unde  $F_{I3}$  și  $M_{I3}$  au expresiile (d)

Făcând înlocuirile și calculele se obține:

$$N_3 = 16G \cos \alpha$$

$$T_3 = \frac{4G}{9} \left( 14 \sin \alpha + 11 \frac{s}{R} \cos \alpha + 1 \right)$$

Ultima ecuație din cele trei ecuații (k) este pentru verificare.

$$3) \text{ Din condiția } \mu \geq \frac{T_3}{N_3} \Rightarrow \mu_{\min} = \frac{T_3}{N_3} = \frac{1}{36 \cos \alpha} \left( 14 \sin \alpha + 11 \frac{s}{R} \cos \alpha + 1 \right) \quad (l)$$

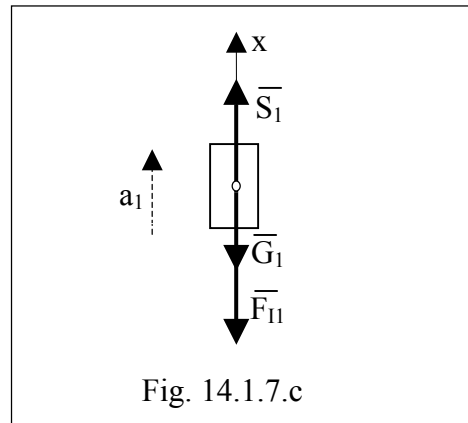


Fig. 14.1.7.c

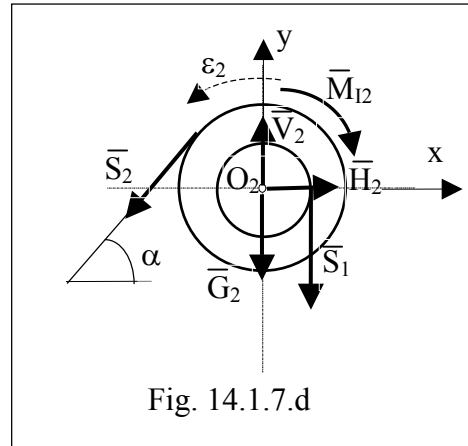


Fig. 14.1.7.d

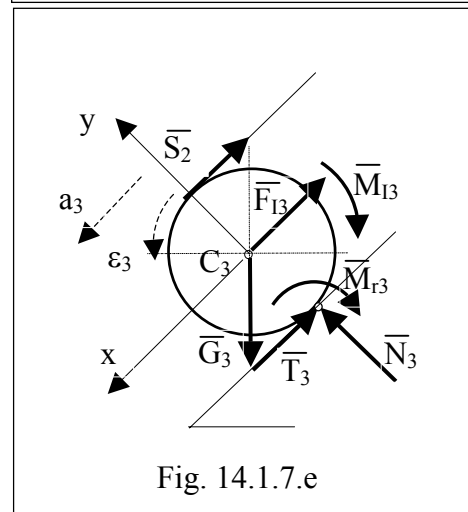


Fig. 14.1.7.e

**14.1.8. Se consideră sistemul din figură format din două corpuri: o prismă de greutate  $G_1$  și unghiul  $\alpha$  și un corp de greutate  $G_2$ , care alunecă liber pe prismă. Se neglijează frecarea dintre cele două corpuri, ca și frecarea dintre prismă și suprafața orizontală. (fig. 14.1.8). Se cere să se determine accelerațiile celor două corpuri precum și forțele de legătură, aplicând principiul lui d'Alembert.**

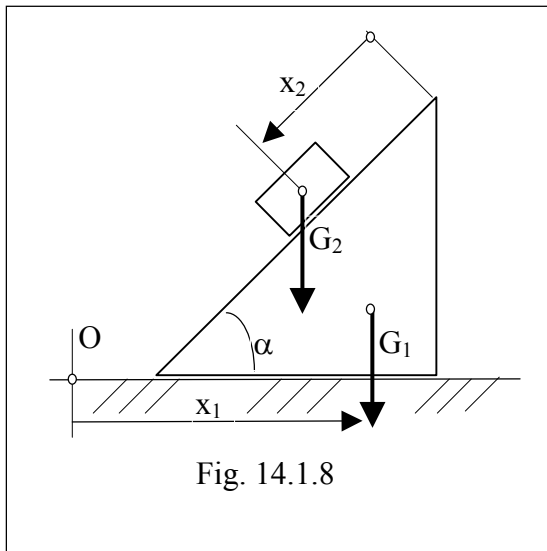


Fig. 14.1.8

**Rezolvare**

Problema având două grade de libertate, se pot alege doi parametri independenți  $x_1$  și  $x_2$ , cu ajutorul cărora se determină poziția sistemului la un moment dat. Accelerațiile sunt:  $a_1 = \ddot{x}_1$ ;  $a_2 = \ddot{x}_2$ , iar cele două corpuri efectuează mișcări de translație.

Se introduc forțele de inerție ce acționează asupra celor două corpuri în centrele lor de masă, având mărimile:

$$F'_{11} = \frac{G_1}{g} a_1; F'_{12} = \frac{G_2}{g} a_1; F''_{12} = \frac{G_2}{g} a_2 \quad (a)$$

și sensurile date în fig. 14.1.8.a,b (opuse accelerațiilor).

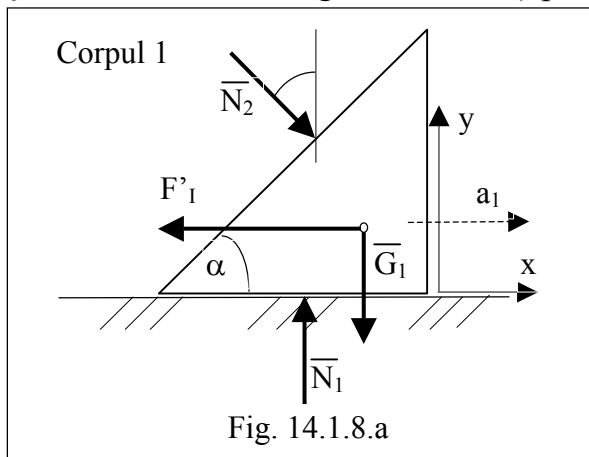


Fig. 14.1.8.a

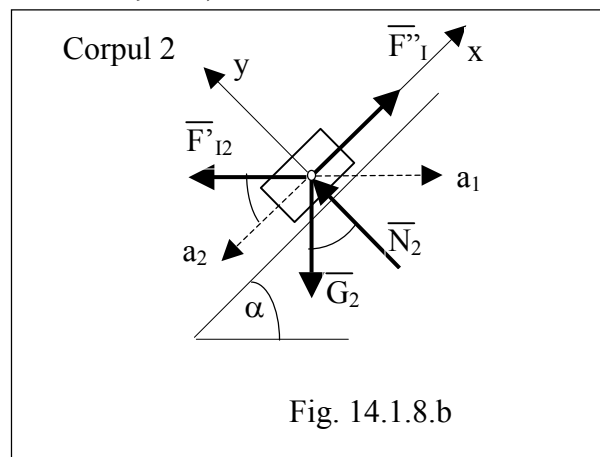


Fig. 14.1.8.b

Pentru corpul 2 accelerația  $a_1$  are rol de accelerație de transport, iar  $a_2$  de accelerație relativă; astfel se justifică expresiile forțelor de inerție  $F'_{12}$  și  $F''_{12}$ .

Aplicând principiul lui d'Alembert, se scriu ecuațiile de echilibru cinetostatic. Se observă că sunt suficiente doar ecuațiile de proiecții, obținându-se respectiv:

Pentru corpul 1: 
$$\begin{cases} N_2 \sin \alpha - \frac{G_1}{g} a_1 = 0 \\ N_1 - G_1 - N_2 \cos \alpha = 0 \end{cases} \quad (b)$$

Pentru corpul 2: 
$$\begin{cases} \frac{G_2}{g} a_2 - \frac{G_2}{g} a_1 \cos \alpha - G_2 \sin \alpha = 0 \\ N_2 - G_2 \cos \alpha - \frac{G_2}{g} a_1 \sin \alpha = 0 \end{cases} \quad (c)$$

Se obține: 
$$a_1 = \frac{G_2 \sin 2\alpha}{2(G_1 + G_2 \sin^2 \alpha)} g; \quad a_2 = \frac{(G_1 + G_2) \sin \alpha}{(G_1 + G_2 \sin^2 \alpha)} g; \quad (d)$$

$$N_2 = \frac{G_1 G_2 \cos \alpha}{(G_1 + G_2 \sin^2 \alpha)}; \quad N_1 = G_1 + \frac{G_1 G_2 \cos^2 \alpha}{(G_1 + G_2 \sin^2 \alpha)};$$



## 14.2. ECUAȚIILE LUI LAGRANGE

### PROBLEME REZOLVATE

**14.2.1.** *Se consideră sistemul din figură format din două corpuri: o prismă de greutate  $G_1$  și unghiul  $\alpha$  și un corp de greutate  $G_2$ , care se deplasează pe prismă. Se neglijează frecarea dintre cele două corpuri, ca și frecarea dintre prismă și suprafața orizontală. (fig. 14.2.1.a). Se cere să se determine legea de mișcare a sistemului, folosind ecuațiile lui Lagrange.*

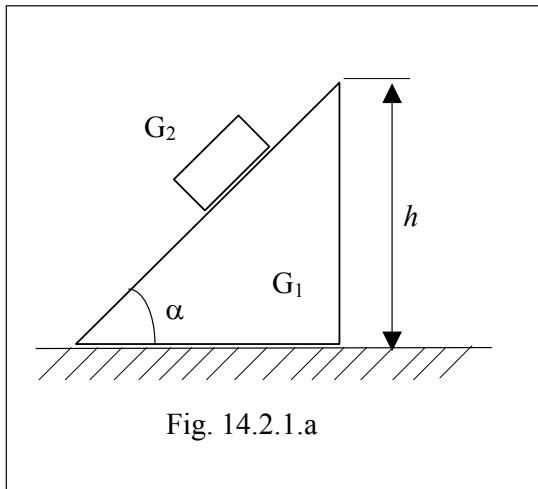


Fig. 14.2.1.a

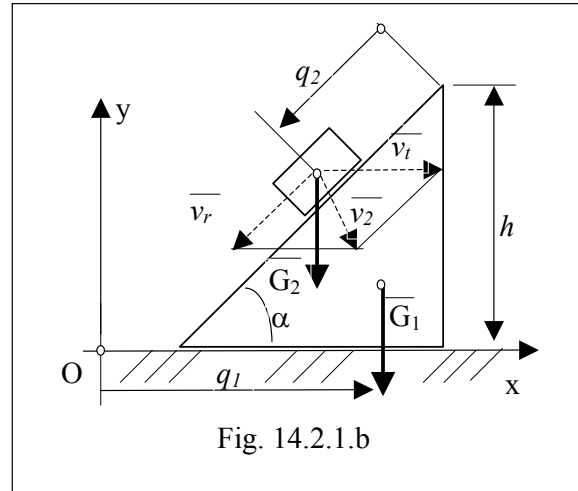


Fig. 14.2.1.b

### Rezolvare

Problema având două grade de libertate, se pot alege drept coordonate generalizate parametrii liniari  $q_1$  și  $q_2$ , cu ajutorul cărora se determină poziția sistemului la un moment dat. Energia cinetică a sistemului se scrie:

$$E = E_1 + E_2 = \frac{G_1}{2g} \dot{q}_1^2 + \frac{G_2}{2g} v_2^2 \quad (a)$$

unde cu  $v_2$  am notat viteza absolută a corpului de greutate  $G_2$ .

Pentru determinarea vitezei  $v_2$  se pot folosi două metode:

#### a. Metoda analitică

Se notează cu  $(x_2, y_2)$  coordonatele centrului de greutate al corpului 2 în raport cu sistemul Oxy ales (fig. 14.2.1.b). Se poate scrie relația vitezelor astfel:

$$v_2^2 = \dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2$$

unde :

$$\begin{cases} x_2 = q_1 - q_2 \cos \alpha \\ y_2 = h - q_2 \sin \alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_2 = \dot{q}_1 - \dot{q}_2 \cos \alpha \\ \dot{y}_2 = -\dot{q}_2 \sin \alpha \end{cases}$$

$$\text{Prin urmare: } v_2^2 = (\dot{q}_1 - \dot{q}_2 \cos \alpha)^2 + (\dot{q}_2 \sin \alpha)^2 = \dot{q}_1^2 - 2\dot{q}_1 \dot{q}_2 \cos \alpha + \dot{q}_2^2 \quad (b)$$

b. *Metoda grafo-analitică*

Din fig. 14.2.1.b se poate observa că viteza corpului 2 se obține prin compunerea vectorială a celor două viteze:  $\bar{v}_2 = \bar{v}_r + \bar{v}_t$ . Prin urmare avem:

$$v_2^2 = v_r^2 + v_t^2 + 2v_r v_t \cos(\pi - \alpha) = \dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 - 2\dot{q}_1 \dot{q}_2 \cos \alpha \quad (b')$$

deci s-a obținut aceeași expresia pentru viteza corpului 2.

Prin urmare energia cinetică a sistemului se scrie:

$$E = \frac{G_1}{2g} \dot{q}_1^2 + \frac{G_2}{2g} (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 - 2\dot{q}_1 \dot{q}_2 \cos \alpha) \quad (c)$$

Derivatele parțiale din ecuațiile lui Lagrange se scriu:

$$\frac{\partial E}{\partial q_1} = 0; \quad \frac{\partial E}{\partial q_2} = 0; \quad (d)$$

$$\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_1} = \frac{G_1 + G_2}{g} \dot{q}_1 - \frac{G_2}{g} \dot{q}_2 \cos \alpha; \quad \frac{\partial E}{\partial \dot{q}_2} = \frac{G_2}{g} (\dot{q}_2 - \dot{q}_1 \cos \alpha);$$

Calculul forțelor generalizate  $Q_1$  și  $Q_2$  se poate face în două moduri:

- a. cu ajutorul lucrului mecanic virtual, considerând pe rând parametrii  $q_1$  și  $q_2$  variabili:

$$(\delta L)_{q_1 \text{ var}} = 0; \quad (\delta L)_{q_2 \text{ var}} = G_2 \delta q_2 \sin \alpha;$$

$$\Rightarrow Q_1 = \frac{(\delta L)_{q_1 \text{ var}}}{\delta q_1} = 0; \quad Q_2 = \frac{(\delta L)_{q_2 \text{ var}}}{\delta q_2} = G_2 \sin \alpha \quad (e)$$

- b. cu ajutorul funcției de forță, care în acest caz are forma:

$$U = \sum_{k=1}^2 m_k g y_k = -G_1 \frac{h}{3} - G_2 (h - q_2 \sin \alpha)$$

unde s-a ținut seama de sensul forțelor față de axele sistemului Oxy. Deci:

$$Q_1 = \frac{\partial U}{\partial q_1} = 0; \quad Q_2 = \frac{\partial U}{\partial q_2} = G_2 \sin \alpha \quad (e')$$

Ecuațiile lui Lagrange :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E}{\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{\partial E}{\partial q_1} = Q_1; \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E}{\partial \dot{q}_2} \right) - \frac{\partial E}{\partial q_2} = Q_2$$

conduc la sistemul de ecuații:

$$\begin{cases} \frac{G_1 + G_2}{g} \ddot{q}_1 - \frac{G_2}{g} \ddot{q}_2 \cos \alpha = 0 \\ \frac{G_2}{g} (\ddot{q}_2 - \ddot{q}_1 \cos \alpha) = G_2 \sin \alpha \end{cases} \quad (f)$$

Rezolvând sistemul se obține același rezultat cu cel obținut prin aplicarea principiului lui d'Alembert :

$$\ddot{q}_1 = a_1 = \frac{G_2 \sin 2\alpha}{2(G_1 + G_2 \sin^2 \alpha)} g; \quad \ddot{q}_2 = a_2 = \frac{(G_1 + G_2) \sin \alpha}{(G_1 + G_2 \sin^2 \alpha)} g; \quad (g)$$

**14.2.2. Se consideră** sistemul din figură format din trei corpuri, aflate respectiv în mișcările de translație, rotație și plan-paralelă, având masele  $m_1, m_2, m_3$  și razele  $R_2$  și  $R_3$  cunoscute, ca în fig. 14.2.2. Sensul de mișcare al celor trei corpuri este indicat în figură. Se presupune că firele nu alunecă pe discuri și se neglijează frecările din lagăre. **Se cere:** Să se determine mișcarea sistemului cu ajutorul ecuațiilor lui Lagrange (parametrii  $h_1, v_1, a_1$ ),

**Rezolvare**

Pentru rezolvarea problemei se face o analiză cinematică a mișcării sistemului care are două grade de libertate: se notează cei doi parametri care definesc mișcarea cu  $q_1$  și  $q_2$  (fig.14.2.2.a). Notând  $AI=x$ , relațiile de lanț cinematic pentru viteze sunt:

$$\omega_2 = \frac{\dot{q}_1}{R_2}; \quad \omega_3 = \frac{\dot{q}_1}{x} = \frac{\dot{q}_2}{R_3 + x} \quad (a)$$

De unde se obține:

$$x = \frac{R_3 \dot{q}_1}{\dot{q}_2 - \dot{q}_1} \quad \text{și} \quad \omega_3 = \frac{\dot{q}_2 - \dot{q}_1}{R_3} \quad (b)$$

Energiile cinetice ale celor trei corpuri sunt:

$$\begin{aligned} E_1 &= \frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} m_1 \dot{q}_1^2 \\ E_2 &= \frac{1}{2} J_2 \omega_2^2 = \frac{m_2}{4} \dot{q}_1^2 \end{aligned} \quad (c)$$

$$\begin{aligned} E_3 &= \frac{1}{2} m_3 v_3^2 + \frac{1}{2} J_3 \omega_3^2 \\ E_3 &= \frac{1}{2} m_3 \dot{q}_2^2 + \frac{1}{4} m_3 (\dot{q}_2 - \dot{q}_1)^2 \end{aligned}$$

Energia cinetică totală este:

$$E = E_1 + E_2 + E_3 = \frac{1}{4} (2m_1 + m_2 + m_3) \dot{q}_1^2 + \frac{3}{4} m_3 \dot{q}_2^2 - \frac{1}{2} m_3 \dot{q}_1 \dot{q}_2 \quad (d)$$

Derivatele parțiale ale energiei cinetice totale se scriu astfel:

$$\frac{\partial E}{\partial q_1} = 0; \quad \frac{\partial E}{\partial q_2} = 0 \quad (e)$$

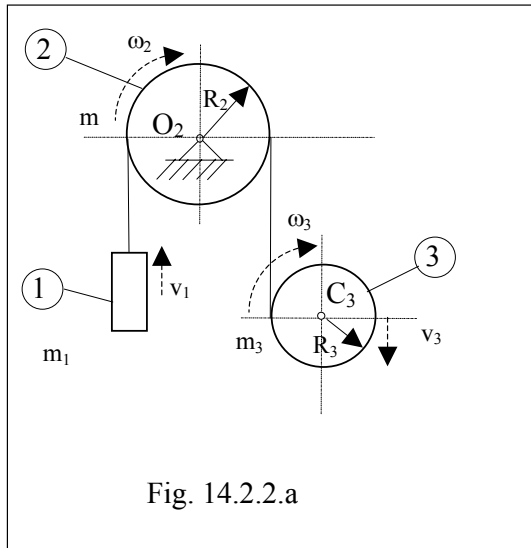


Fig. 14.2.2.a

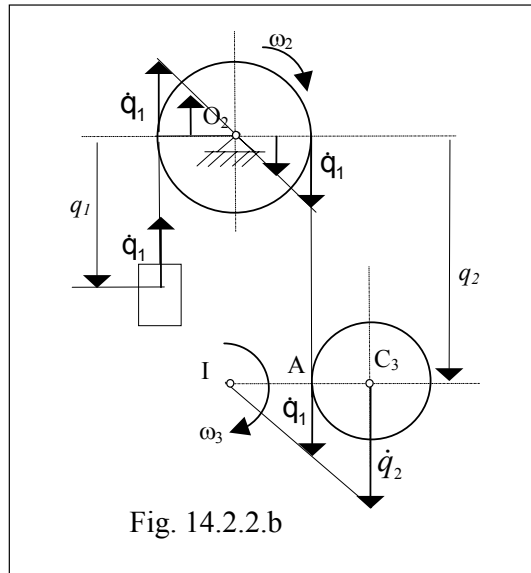


Fig. 14.2.2.b

$$\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_1} = \frac{1}{2}(2m_1 + m_2 + m_3)\dot{q}_1 - \frac{1}{2}m_3\dot{q}_2 \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_1}\right) = \frac{1}{2}(2m_1 + m_2 + m_3)\ddot{q}_1 - \frac{1}{2}m_3\ddot{q}_2 \quad (f)$$

$$\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_2} = \frac{3}{2}m_3\dot{q}_2 - \frac{1}{2}m_3\dot{q}_1 \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_2}\right) = \frac{3}{2}m_3\ddot{q}_2 - \frac{1}{2}m_3\ddot{q}_1$$

Forțele generalizate  $Q_1$  și  $Q_2$  se calculează variind succesiv parametrul corespunzător ( $q_1$  respectiv  $q_2$ ) și fixându-l pe celălalt, (vezi fig. 14.2.2.b) adică:

$$Q_1 = \frac{(\delta L)_{q_1 var}}{\delta q_1} = -m_1 g; \quad Q_2 = \frac{(\delta L)_{q_2 var}}{\delta q_2} = m_3 g \quad (g)$$

Înlocuind în ecuațiile lui Lagrange :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_1}\right) - \frac{\partial E}{\partial q_1} = Q_1; \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_2}\right) - \frac{\partial E}{\partial q_2} = Q_2. \quad (h)$$

se obține sistemul de ecuații algebrice:

$$\begin{cases} (2m_1 + m_2 + m_3)\ddot{q}_1 - m_3\ddot{q}_2 = -2m_1 g \\ -m_3\ddot{q}_1 + 3m_2\ddot{q}_2 = 2m_3 g \end{cases}$$

Rezolvând acest sistem se găsesc accelerațiile generalizate  $\ddot{q}_1$  și  $\ddot{q}_2$

### Metoda a IIa

Problema poate fi rezolvată considerând drept coordonate generalizate unghiurile de rotație ale celor două discuri aflate în mișcare de rotație, respectiv plan-paralelă :  $\theta_1$  și  $\theta_2$ . De asemenea se modifică notațiile: se notează cu  $R_1$  și  $m_1$  discul de rază  $R_2$  și masă  $m_2$ , cu  $R_2$  și  $m_2$  discul de rază  $R_3$  și masă  $m_3$  și cu  $m_3$  corpul de masă  $m_1$  ca în fig. 14.2.2.c

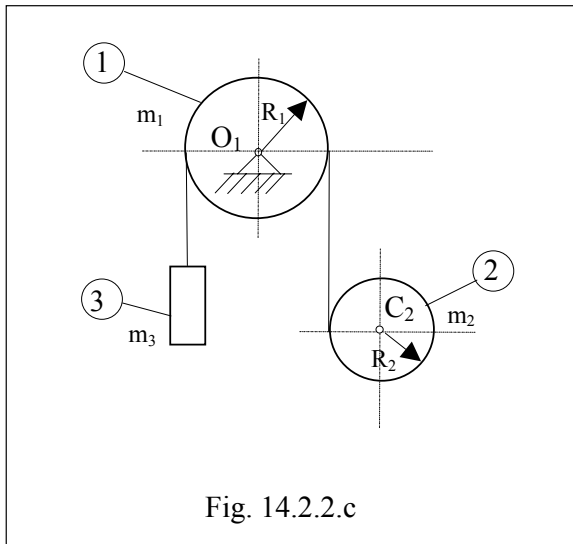


Fig. 14.2.2.c

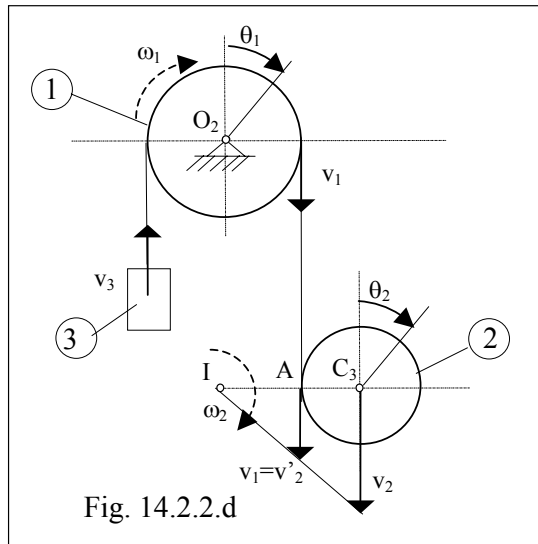


Fig. 14.2.2.d

Din analiza cinematică a mișcării (conform fig 14.2.2.d) se obține:

$$v_3 = v_1 = R_1 \dot{\theta}_1 \quad \text{și} \quad v_2 = IC_2 \cdot \dot{\theta}_2 = (IA + R_2) \cdot \dot{\theta}_2 = \left(\frac{v'_2}{\dot{\theta}_2} + R_2\right) \cdot \dot{\theta}_2 = R_1 \cdot \dot{\theta}_1 + R_2 \cdot \dot{\theta}_2 \quad (i)$$

Deci energia cinetică totală a sistemului se scrie:

$$E = E_1 + E_2 + E_3 = \frac{1}{4}m_1R_1\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}m_2(R_1\dot{\theta}_1 + R_2\dot{\theta}_2)^2 + \frac{1}{4}m_2R_2\dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{4}m_3R_1\dot{\theta}_1^2 \quad (j)$$

Derivatele parțiale ale energiei cinetice totale se scriu astfel:

$$\frac{\partial E}{\partial \theta_1} = 0; \quad \frac{\partial E}{\partial \theta_2} = 0 \quad (k)$$

$$\frac{\partial E}{\partial \dot{\theta}_1} = \left(\frac{m_1}{2} + m_3\right)R_1^2\dot{\theta}_1 + m_2R_1(R_1\dot{\theta}_1 + R_2\dot{\theta}_2) \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{\theta}_1}\right) = \left(\frac{m_1}{2} + m_3\right)R_1^2\ddot{\theta}_1 + m_2R_1(R_1\ddot{\theta}_1 + R_2\ddot{\theta}_2)$$

$$\frac{\partial E}{\partial \dot{\theta}_2} = m_2R_2(R_1\dot{\theta}_1 + R_2\dot{\theta}_2) + \frac{m_2R_2^2}{2}\dot{\theta}_2 \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{\theta}_2}\right) = m_2R_2(R_1\ddot{\theta}_1 + R_2\ddot{\theta}_2) + \frac{m_2R_2^2}{2}\ddot{\theta}_2$$

Forțele generalizate  $Q_1$  și  $Q_2$  se calculează variind succesiv parametrul corespunzător ( $\theta_1$  respectiv  $\theta_2$ ) și fixându-l pe celălalt, (vezi fig. 14.2.2.d) adică:

$$Q_1 = \frac{(\delta L)_{\theta_1, var}}{\delta \theta_1} = \frac{m_2gR_1\delta\theta_1 - m_3gR_1\delta\theta_1}{\delta\theta_1} = R_1g(m_2 - m_3) \quad (l)$$

$$Q_2 = \frac{(\delta L)_{\theta_2, var}}{\delta \theta_2} = \frac{m_2gR_2\delta\theta_2}{\delta\theta_2} = R_2gm_2$$

Înlocuind în ecuațiile lui Lagrange :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{\theta}_1}\right) - \frac{\partial E}{\partial \theta_1} = Q_1; \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{\theta}_2}\right) - \frac{\partial E}{\partial \theta_2} = Q_2.$$

se obține sistemul de ecuații algebrice:

$$\begin{cases} \left(\frac{m_1}{2} + m_3\right)R_1^2\ddot{\theta}_1 + m_2R_1(R_1\ddot{\theta}_1 + R_2\ddot{\theta}_2) = R_1g(m_2 - m_3) \\ m_2R_2(R_1\ddot{\theta}_1 + R_2\ddot{\theta}_2) + \frac{m_2R_2^2}{2}\ddot{\theta}_2 = R_2gm_2 \end{cases} \quad (m)$$

de unde rezultă accelerațiile unghiulare  $\ddot{\theta}_1$  și  $\ddot{\theta}_2$  (care sunt constante).

**14.2.3. Se consideră** sistemul din figură unde mărimile  $R$ ,  $G$ ,  $\alpha$ , sunt cunoscute format din trei corpuri, după cum urmează (fig. 14.2.3.a):

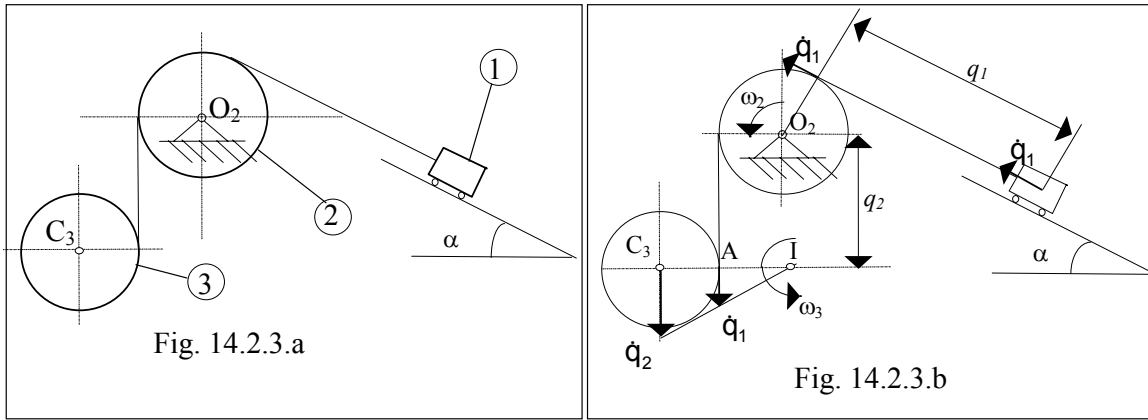
Corpul (1) de greutate  $G_1 = 8G$ , coboară pe planul înclinat cu unghiul  $\alpha$ , fără frecare ;

Corpul (2) de greutate  $G_2 = 8G$  și rază  $R_2 = R$  este antrenat într-o mișcare de rotație (se neglijează de asemenea frecarea în lagărul  $O_2$ )

Corpul (3) de greutate  $G_3 = 64G$  și rază  $R_3 = 2R$  se deplasează în jos având o mișcare plan-paralelă.

**Se cere:**

Să se determine mișcarea sistemului cu ajutorul ecuațiilor lui Lagrange



**Rezolvare**

Pentru rezolvarea problemei se face o analiză cinematică a mișcării sistemului care are două grade de libertate: se notează cei doi parametri care definesc mișcarea cu  $q_1$  și  $q_2$  (fig.14.2.3.b). Notând  $AI=x$ , relațiile de lanț cinematic pentru viteze sunt:

$$\begin{aligned} \omega_2 &= \frac{\dot{q}_1}{R} & \Rightarrow & \quad x = \frac{2R\dot{q}_1}{\dot{q}_2 - \dot{q}_1} \\ \omega_3 &= \frac{\dot{q}_1}{x} = \frac{\dot{q}_2}{2R + x} & \omega_3 &= \frac{\dot{q}_2 - \dot{q}_1}{2R} \end{aligned} \tag{a}$$

Energiile cinetice ale celor trei corpuri sunt:

$$\begin{aligned} E_1 &= \frac{1}{2} M_1 v_1^2 = \frac{4G}{g} \dot{q}_1^2 \\ E_2 &= \frac{1}{2} J_2 \omega_2^2 = \frac{2G}{g} \dot{q}_1^2, \text{ unde } J_2 = \frac{2G}{g} R^2 \\ E_3 &= \frac{1}{2} M_3 v_3^2 + \frac{1}{2} J_3 \omega_3^2 = \frac{16G}{g} (\dot{q}_1^2 + 3\dot{q}_2^2 - 2\dot{q}_1\dot{q}_2) \end{aligned} \tag{b}$$

Energia cinetică totală este suma energiilor cinetice ale celor trei corpuri:

$$E = E_1 + E_2 + E_3 = \frac{2G}{g} (11\dot{q}_1^2 + 24\dot{q}_2^2 - 16\dot{q}_1\dot{q}_2) \tag{c}$$

Derivatele parțiale ale energiei cinetice totale sunt:

$$\begin{cases} \frac{\partial E}{\partial q_1} = 0 ; & \frac{\partial E}{\partial q_2} = 0 \\ \frac{\partial E}{\partial \dot{q}_1} = \frac{2G}{g} (22\dot{q}_1 - 16\dot{q}_2) \Rightarrow \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E}{\partial \dot{q}_1} \right) = \frac{4G}{g} (11\ddot{q}_1 - 8\ddot{q}_2) \\ \frac{\partial E}{\partial \dot{q}_2} = \frac{2G}{g} (48\dot{q}_2 - 16\dot{q}_1) \Rightarrow \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E}{\partial \dot{q}_2} \right) = \frac{32G}{g} (3\ddot{q}_2 - \ddot{q}_1) \end{cases} \tag{d}$$

Forțele generalizate  $Q_1$  și  $Q_2$  se calculează variind succesiv parametrul corespunzător ( $q_1$  respectiv  $q_2$ ) și fixându-l pe celălalt, (vezi fig.14.2.3.c) adică:

$$Q_1 = \frac{(\delta L)_{q_1, var}}{\delta q_1} = -8G \sin \alpha; \quad Q_2 = \frac{(\delta L)_{q_2, var}}{\delta q_2} = 64G \quad (e)$$

Înlocuind relațiile (d) și (e) în ecuațiile lui Lagrange :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E}{\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{\partial E}{\partial q_1} = Q_1; \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E}{\partial \dot{q}_2} \right) - \frac{\partial E}{\partial q_2} = Q_2$$

obținem următorul sistem de ecuații algebrice:

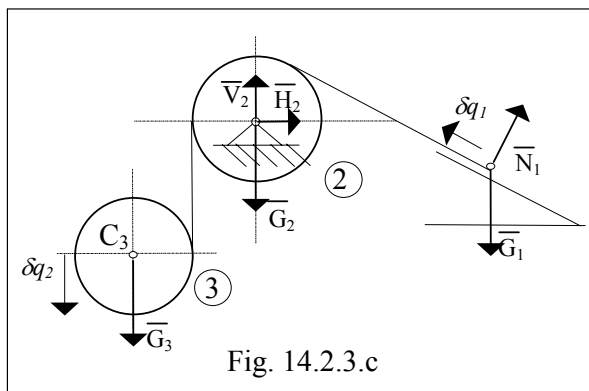


Fig. 14.2.3.c

$$\begin{cases} 11\ddot{q}_1 - 8\ddot{q}_2 = -2g \sin \alpha \\ -\ddot{q}_1 + 3\ddot{q}_2 = 2g \end{cases} \quad (f)$$

Rezolvând acest sistem rezultă accelerațiile generalizate

$$\begin{aligned} \ddot{q}_1 &= \frac{2g}{25}(8 - 3 \sin \alpha); \\ \ddot{q}_2 &= \frac{2g}{25}(11 - \sin \alpha) \end{aligned} \quad (g)$$

Integrând succesiv de două ori în raport cu timpul, se obțin vitezele generalizate ( $\dot{q}_1$  și  $\dot{q}_2$ ), respectiv deplasările generalizate ( $q_1$  și  $q_2$ ):

$$\dot{q}_1 = \frac{2g}{25}(8 - 3 \sin \alpha)t + C_1; \quad \dot{q}_2 = \frac{2g}{25}(11 - \sin \alpha)t + C_2 \quad (h)$$

$$q_1 = \frac{g}{25}(8 - 3 \sin \alpha)t^2 + C_1 t + C_3; \quad q_2 = \frac{g}{25}(11 - \sin \alpha)t^2 + C_2 t + C_4 \quad (i)$$

Constantele  $C_1 \dots C_4$  se obțin din condițiile inițiale ale problemei.

**14.2.4. Se consideră sistemul din figura 14.2.4.a format din trei corpuri unde mărimile  $R$ ,  $G$ ,  $\alpha$ , sunt cunoscute:**

Corpul (1) de greutate  $G_1=200G$  coboară vertical;

Corpul (2) de greutate  $G_2 = 8G$  și rază  $R_2 = 2R$  este antrenat într-o mișcare de rotație (fără frecare în lagărul  $O_2$ )

Corpul (3) de greutate  $G_3 = 16G$  și rază  $R_3 = R$  coboară pe planul înclinat cu unghiul  $\alpha$  (rostogolindu-se și alunecând simultan, cu  $s=0$ ,  $\mu=0$ ) într-o mișcare plan-paralelă.

**Se cere:** Să se determine mișcarea sistemului cu ajutorul ecuațiilor lui Lagrange (parametrii  $h_1, v_1, a_1$ ),

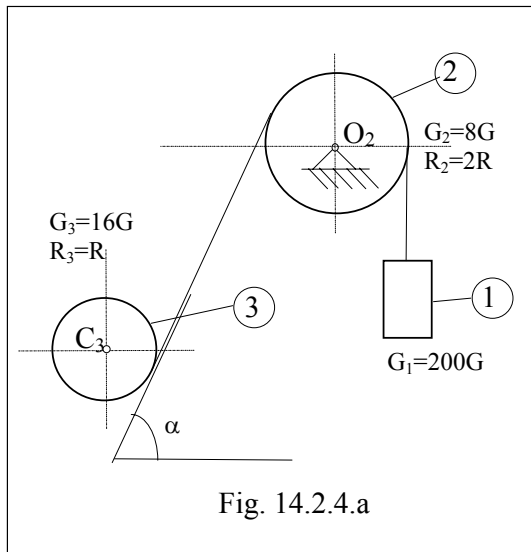


Fig. 14.2.4.a

**Rezolvare**

Pentru rezolvarea problemei se face o analiză cinematică a mișcării sistemului care are două grade de libertate: se notează cei doi parametri care definesc mișcarea cu  $q_1$  și  $q_2$  (fig.14.2.4.a). Notând  $AI=x$ , relațiile de lanț cinematic pentru viteze sunt:

$$\omega_2 = \frac{\dot{q}_1}{2R}; \quad \omega_3 = \frac{q_1}{x} = \frac{q_2}{R-x} \quad (a)$$

De unde se obține:

$$x = \frac{R\dot{q}_1}{\dot{q}_1 + \dot{q}_2} \quad \text{și} \quad \omega_3 = \frac{\dot{q}_1 + \dot{q}_2}{R} \quad (b)$$

Energiile cinetice de fiecare corp se scriu astfel:

$$E_1 = \frac{1}{2} M_1 v_1^2 = \frac{100G}{g} \dot{q}_1^2$$

$$E_2 = \frac{1}{2} J_2 \omega_2^2 = \frac{2G}{g} \dot{q}_1^2$$

$$E_3 = \frac{1}{2} M_3 v_3^2 + \frac{1}{2} J_3 \omega_3^2 \quad (c)$$

$$E_3 = \frac{4G}{g} (3\dot{q}_1^2 + 2\dot{q}_1\dot{q}_2 + \dot{q}_2^2)$$

$$\Rightarrow E = \frac{2G}{g} (57\dot{q}_1^2 + 4\dot{q}_1\dot{q}_2 + \dot{q}_2^2)$$

Derivatele energiei cinetice totale se scriu astfel:

$$\frac{\partial E}{\partial q_1} = 0; \quad \frac{\partial E}{\partial q_2} = 0$$

$$\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_1} = \frac{4G}{g} (57\dot{q}_1 + 2\dot{q}_2)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E}{\partial \dot{q}_1} \right) = \frac{4G}{g} (57\ddot{q}_1 + 2\ddot{q}_2) \quad (d)$$

$$\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_2} = \frac{4G}{g} (2\dot{q}_1 + \dot{q}_2)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E}{\partial \dot{q}_2} \right) = \frac{4G}{g} (2\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2)$$

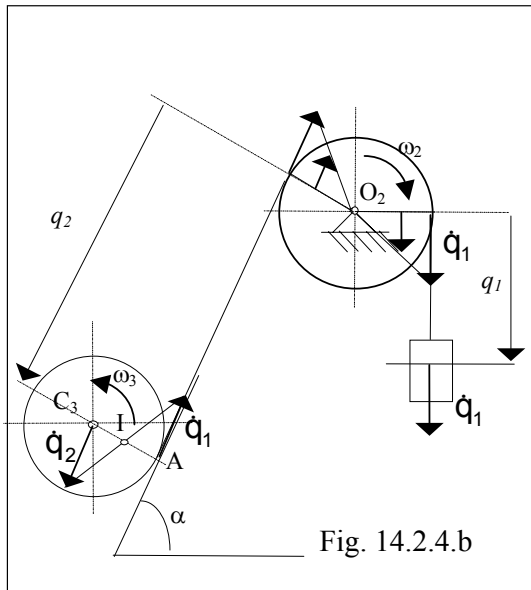


Fig. 14.2.4.b

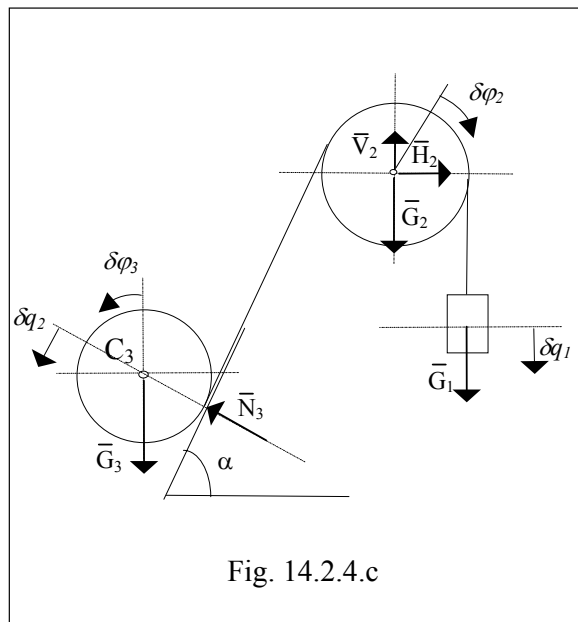


Fig. 14.2.4.c



Forțele generalizate  $Q_1$  și  $Q_2$  se calculează variind succesiv parametrul corespunzător ( $q_1$  respectiv  $q_2$ ) și fixându-l pe celălalt, (vezi fig. 14.2.4.c) adică:

$$Q_1 = \frac{(\delta L)_{q_1 \text{ var}}}{\delta q_1} = G_1 = 200G; \quad Q_2 = \frac{(\delta L)_{q_2 \text{ var}}}{\delta q_2} = G_3 \sin \alpha = 16G \sin \alpha. \quad (e)$$

Înlocuind în ecuațiile lui Lagrange :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E}{\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{\partial E}{\partial q_1} = Q_1; \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E}{\partial \dot{q}_2} \right) - \frac{\partial E}{\partial q_2} = Q_2. \quad (f)$$

se obține sistemul algebric de ecuații:

$$\begin{cases} 57\ddot{q}_1 + 2\ddot{q}_2 = 50g \\ 2\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2 = 4g \sin \alpha \end{cases} \quad (g)$$

cu soluțiile: 
$$\begin{cases} \ddot{q}_1 = \frac{(25 - 4 \sin \alpha)}{27} g; \\ \ddot{q}_2 = \frac{(114 \sin \alpha - 50)}{27} g \end{cases} \quad (h)$$

Integrând succesiv de două ori în raport cu timpul, se obțin vitezele generalizate ( $\dot{q}_1$  și  $\dot{q}_2$ )

$$\begin{cases} \dot{q}_1 = \frac{(25 - 4 \sin \alpha)}{27} gt + C_1 \\ \dot{q}_2 = \frac{(114 \sin \alpha - 50)}{27} gt + C_2 \end{cases} \quad (i)$$

respectiv deplasările generalizate ( $q_1$  și  $q_2$ ):

$$\begin{cases} q_1 = \frac{(25 - 4 \sin \alpha)}{54} gt^2 + C_1 t + C_3 \\ q_2 = \frac{(114 \sin \alpha - 50)}{54} gt^2 + C_2 t + C_4 \end{cases} \quad (j)$$

Constantele  $C_1 \dots C_4$  se obțin din condițiile inițiale ale problemei.

**14.2.5. Se consideră** sistemul format din trei corpuri de greutate  $G_1$ ,  $G_2$ ,  $G_3$  și doi scripeți de masă neglijabilă, unul fix de rază  $R_1$  și unul mobil de rază  $R_2$ . Sistemul este legat cu ajutorul unor fire flexibile și inextensibile, care se înfășoară la periferia roților ca în figura 14.2.5.a. **Se cere:** Să se determine legea de mișcare a sistemului cu ajutorul ecuațiilor lui Lagrange

**Rezolvare**

**Metoda I**

Problema are două grade de libertate: se notează cei doi parametri care definesc mișcarea cu  $q_1$  și  $q_2$  (fig.14.2.5.a).

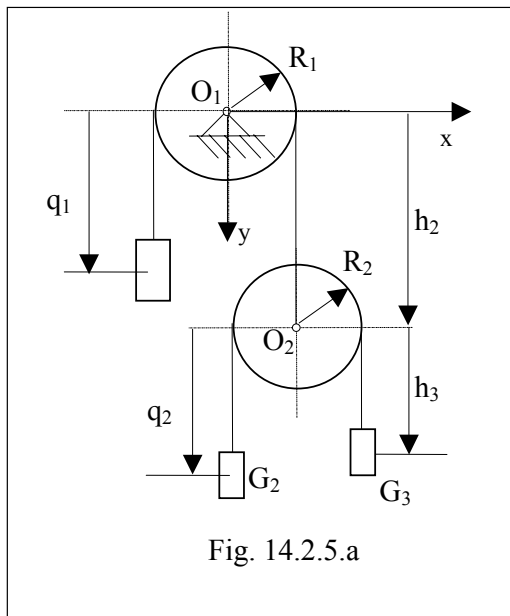


Fig. 14.2.5.a

Greutățile  $G_1$ ,  $G_2$ , și  $G_3$  au respectiv ordonatele:

$$\begin{aligned} y_1 &= q_1 \\ y_2 &= h_1 + q_2 = L_1 - \pi R_1 - q_1 + q_2 \quad (a) \\ y_3 &= h_1 + h_2 = L_1 - \pi R_1 - q_1 + L_2 - \pi R_2 - q_2 \end{aligned}$$

unde  $L_1$  și  $L_2$  sunt lungimile firelor

Vitezele celor trei corpuri se pot scrie deci:

$$\begin{aligned} v_1 &= \dot{y}_1 = \dot{q}_1 \\ v_2 &= \dot{y}_2 = \dot{q}_2 - \dot{q}_1 \quad (b) \\ v_3 &= \dot{y}_3 = -\dot{q}_1 - \dot{q}_2 \end{aligned}$$

Energia cinetică totală a sistemului este:

$$E = E_1 + E_2 + E_3 \quad (c)$$

Energiile celor trei corpuri se scriu:

$$E_1 = \frac{G_1}{2g} v_1^2 = \frac{G_1}{2g} \dot{q}_1^2; \quad E_2 = \frac{G_2}{2g} v_2^2 = \frac{G_2}{2g} (\dot{q}_2 - \dot{q}_1)^2; \quad E_3 = \frac{G_3}{2g} v_3^2 = \frac{G_3}{2g} (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 \quad (d)$$

Energia cinetică totală a sistemului este deci:

$$E = \frac{G_1 + G_2 + G_3}{2g} \dot{q}_1^2 + \frac{G_2 + G_3}{2g} \dot{q}_2^2 + \frac{G_3 - G_2}{g} \dot{q}_1 \dot{q}_2 \quad (d)$$

Derivatele parțiale ale energiei cinetice sunt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial q_1} &= 0; \quad \frac{\partial E}{\partial q_2} = 0; \\ \frac{\partial E}{\partial \dot{q}_1} &= \frac{G_1 + G_2 + G_3}{g} \dot{q}_1 + \frac{G_3 - G_2}{g} \dot{q}_2 \quad (e) \\ \frac{\partial E}{\partial \dot{q}_2} &= \frac{G_2 + G_3}{g} \dot{q}_2 + \frac{G_3 - G_2}{g} \dot{q}_1 \end{aligned}$$

Detreminarea forțelor generalizate se poate face în două moduri:

- a. prin anularea lucrului mecanic virtual, considerând pe rând pe  $q_1$ , respectiv  $q_2$  variabile:

$$\begin{aligned} (\delta L)_{q_1 var} &= G_1 \delta q_1 - (G_2 + G_3) \delta q_1 = (G_1 - G_2 - G_3) \delta q_1 \\ (\delta L)_{q_2 var} &= (G_2 - G_3) \delta q_2 \quad (f) \\ \Rightarrow Q_1 &= \frac{(\delta L)_{q_1 var}}{\delta q_1} = G_1 - G_2 - G_3; \quad Q_2 = \frac{(\delta L)_{q_2 var}}{\delta q_2} = G_2 - G_3 \end{aligned}$$

- b. prin anularea derivatelor parțiale ale funcției de forță U; în cazul de față aceasta se scrie astfel:

$$U = \sum_{i=1}^3 m_i g y_i = G_1 q_1 + G_2 (q_2 + L_1 - \pi R_1 - q_1) + G_3 (L_1 + L_2 - \pi R_1 - \pi R_2 - q_1 - q_2)$$

$$\text{adică: } Q_1 = \frac{\partial U}{\partial q_1} = G_1 - G_2 - G_3; \quad Q_2 = \frac{\partial U}{\partial q_2} = G_2 - G_3; \quad (f')$$

Înlocuind în ecuațiile lui Lagrange :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E}{\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{\partial E}{\partial q_1} = Q_1; \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E}{\partial \dot{q}_2} \right) - \frac{\partial E}{\partial q_2} = Q_2.$$

se obține sistemul algebric de ecuații:

$$\begin{cases} \frac{G_1 + G_2 + G_3}{g} \ddot{q}_1 + \frac{G_3 - G_2}{g} \ddot{q}_2 = G_1 - G_2 - G_3 \\ \frac{G_3 - G_2}{g} \ddot{q}_1 + \frac{G_2 + G_3}{g} \ddot{q}_2 = G_2 - G_3 \end{cases} \quad (g)$$

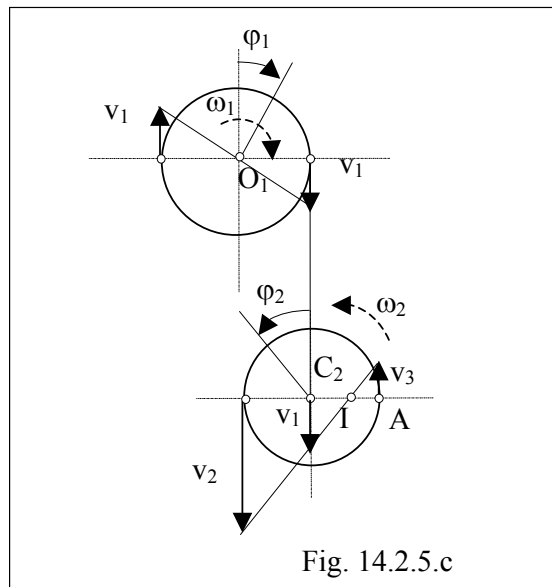
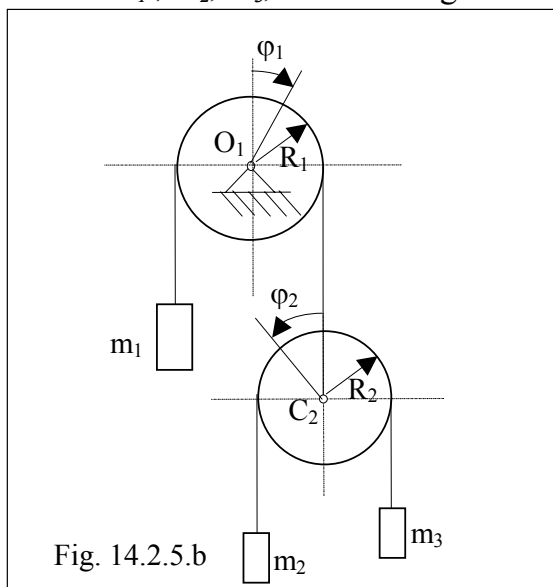
de unde se obțin accelerațiile :

$$\begin{aligned} \ddot{q}_1 &= \frac{G_1(G_2 + G_3) - 4G_2G_3}{G_1(G_2 + G_3) + 4G_2G_3} g; \\ \ddot{q}_2 &= \frac{2G_1(G_2 - G_3)}{G_1(G_2 + G_3) + 4G_2G_3} g \end{aligned} \quad (h)$$

Integrând succesiv de două ori în raport cu timpul, se obțin vitezele generalizate ( $\dot{q}_1$  și  $\dot{q}_2$ ) respectiv deplasările generalizate ( $q_1$  și  $q_2$ ). Constantele  $C_1 \dots C_4$  se obțin din condițiile inițiale ale problemei.

### Metoda a II a

Se consideră drept coordonate generalizate unghiurile de rotație ale celor două discuri  $\varphi_1$  și  $\varphi_2$ , iar în loc de greutatețile celor trei corpuri se consideră masele  $m_1, m_2, m_3$ , conform fig. 14.2.5.b.



Din analiza cinematică a mișcării (conform fig 14.2.5.c) se obține:

$$\dot{\varphi}_1 = \omega_1 = \frac{v_1}{R_1} \text{ și } \dot{\varphi}_2 = \omega_2 = \frac{v_3}{x} = \frac{v_1}{R_2 - x} = \frac{v_2}{2R_2 - x} \Rightarrow x = IA = \frac{v_3 R_2}{v_1 + v_3} \quad (\text{i})$$

Rezultă că vitezele celor trei corpuri de mase  $m_1$ ,  $m_2$  și  $m_3$  sunt:

$$v_1 = R_1 \dot{\varphi}_1; \quad v_2 = R_1 \dot{\varphi}_1 + R_2 \dot{\varphi}_2; \quad v_3 = R_1 \dot{\varphi}_1 - R_2 \dot{\varphi}_2;$$

Deci energia cinetică totală a sistemului se scrie:

$$E = E_1 + E_2 + E_3 = \frac{1}{2} m_1 R_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 (R_1 \dot{\varphi}_1 + R_2 \dot{\varphi}_2)^2 + \frac{1}{2} m_3 (R_1 \dot{\varphi}_1 - R_2 \dot{\varphi}_2)^2; \quad (\text{j})$$

$$E = \frac{1}{2} (m_1 + m_2 + m_3) R_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2} (m_2 + m_3) R_2^2 \dot{\varphi}_2^2 + (m_2 - m_3) R_1 R_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2$$

Derivatele parțiale ale energiei cinetice totale se scriu astfel:

$$\frac{\partial E}{\partial \varphi_1} = 0; \quad \frac{\partial E}{\partial \varphi_2} = 0 \quad (\text{k})$$

$$\frac{\partial E}{\partial \dot{\varphi}_1} = (m_1 + m_2 + m_3) R_1 \dot{\varphi}_1 + (m_2 - m_3) R_1 R_2 \dot{\varphi}_2 \quad (\text{l})$$

$$\frac{\partial E}{\partial \dot{\varphi}_2} = (m_2 + m_3) R_2 \dot{\varphi}_2 + (m_2 - m_3) R_1 R_2 \dot{\varphi}_1$$

Forțele generalizate  $Q_1$  și  $Q_2$  se calculează variind succesiv parametrul corespunzător ( $\varphi_1$  respectiv  $\varphi_2$ ) și fixându-l pe celălalt, (vezi fig. 14.2.5.c) adică:

$$Q_1 = \frac{(\delta L)_{\varphi_1 \text{ var}}}{\delta \varphi_1} = R_1 g (-m_1 + m_2 + m_3); \quad Q_2 = \frac{(\delta L)_{\varphi_2 \text{ var}}}{\delta \varphi_2} = R_2 g (m_2 - m_3) \quad (\text{m})$$

Înlocuind în ecuațiile lui Lagrange :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E}{\partial \dot{\varphi}_1} \right) - \frac{\partial E}{\partial \varphi_1} = Q_1; \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E}{\partial \dot{\varphi}_2} \right) - \frac{\partial E}{\partial \varphi_2} = Q_2.$$

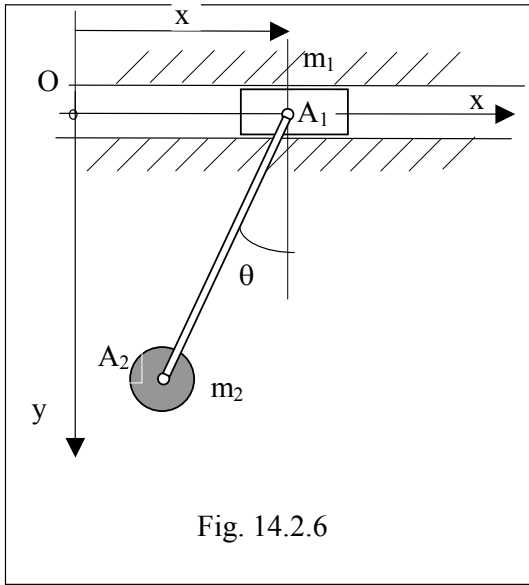
se obține sistemul de ecuații algebrice:

$$\begin{cases} (m_1 + m_2 + m_3) R_1 \ddot{\varphi}_1 + (m_2 - m_3) R_1 R_2 \ddot{\varphi}_2 = R_1 g (-m_1 + m_2 + m_3) \\ (m_2 + m_3) R_2 \ddot{\varphi}_2 + (m_2 - m_3) R_1 R_2 \ddot{\varphi}_1 = R_2 g (m_2 - m_3) \end{cases} \quad (\text{n})$$

de unde rezultă accelerațiile unghiulare  $\ddot{\varphi}_1$  și  $\ddot{\varphi}_2$  (care sunt constante).

**14.2.6 Se consideră sistemul din figură format din două corpuri: un corp paralelipedic de masă  $m_1$  și bilă de masă  $m_2$ , care sunt legate între ele prin intermediul unei bare  $A_1 A_2 = \ell$  de masă neglijabilă. Se neglijează frecarea dintre corp și ghidajul orizontal. (fig. 14.2.6).**

**Se cere să se determine legea de mișcare a sistemului folosind ecuațiile lui Lagrange.**



### Rezolvare

Sistemul având două grade de libertate, se pot alege drept coordonate generalizate parametrii  $x$  și  $\theta$ .

Coordonatele centrelor de masă ale celor două corpuri sunt:

$$A_1 \begin{cases} x_1 = x \\ y_1 = 0 \end{cases} \quad A_2 \begin{cases} x_2 = x - l \sin \theta \\ y_2 = l \cos \theta \end{cases} \quad (a)$$

Deci vitezele după cele două direcții sunt:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \dot{x} \\ \dot{y}_1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{x}_2 = \dot{x} - l\dot{\theta} \cos \theta \\ \dot{y}_2 = -l\dot{\theta} \sin \theta \end{cases}$$

$$v_1^2 = \dot{x}^2; \quad v_2^2 = (\dot{x} - l\dot{\theta} \cos \theta)^2 + (l\dot{\theta} \sin \theta)^2$$

Energia cinetică a sistemului se scrie:

$$E = E_1 + E_2 = \frac{m_1}{2} v_1^2 + \frac{m_2}{2} v_2^2 = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \dot{x}^2 + \frac{m_2 l}{2} (\dot{\theta}^2 - 2\dot{x}\dot{\theta} \cos \theta) \quad (b)$$

Funcția de forță în acest caz are forma:

$$U = -V = m_2 g y_2 = m_2 g l \cos \theta \quad (c)$$

Funcția lui Lagrange are deci expresia:

$$L = E + U = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \dot{x}^2 + \frac{m_2 l}{2} (\dot{\theta}^2 - 2\dot{x}\dot{\theta} \cos \theta) + m_2 g l \cos \theta \quad (d)$$

Se aplică ecuațiile lui Lagrange sub forma:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_1} = 0; \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_2} = 0, \text{ cu } q_1 = x \text{ și } q_2 = \theta$$

Se obține sistemul de ecuații diferențiale:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} [(m_1 + m_2) \dot{x} - m_2 l \dot{\theta} \cos \theta] = 0 \\ m_2 l \frac{d}{dt} [l \dot{\theta} - \dot{x} \cos \theta] - m_2 l (\dot{x} \dot{\theta} - g) \sin \theta = 0 \end{cases} \quad (e)$$

În cazul micilor oscilații ale sistemului se poate considera  $\sin \theta \cong \theta$ ,  $\cos \theta \cong 1$  și sistemul de ecuații diferențiale (e) devine:

$$\begin{cases} (m_1 + m_2) \dot{x} - m_2 l \dot{\theta} = C; \\ \ddot{\theta} + \frac{m_1 + m_2}{m_1} \frac{g}{l} \theta = 0 \end{cases} \quad (f)$$

Cea de a doua ecuație reprezintă ecuația unei mișcări armonice de pulsație:  $\omega = \sqrt{g(m_1 + m_2)/m_1 l}$ , cu soluția:  $\theta = \theta_0 \cos(\omega t + \varphi)$  În cazul în care  $m_1 \gg m_2$  (când corpul 1 rămâne practic în repaus) se obține ( trecând la limită) perioada pendulului matematic:  $T = 2\pi/\omega = 2\pi\sqrt{l/g}$ .

**14.2.7. Se consideră** sistemul din figură format din două bile de mase  $m_1$  și  $m_2$ , suspendate pe două fire de lungimi  $OA_1 = A_1A_2 = \ell$  de masă neglijabilă. **Se cere** să se determine pulsațiile proprii ale sistemului de pendule folosind ecuațiile lui Lagrangei.

**Rezolvare**

Sistemul având două grade de libertate, se pot alege drept coordonate generalizate parametrii  $\varphi_1$  și  $\varphi_2$ , unghiurile pe care le fac firele cu verticala (fig. 14.2.7). Coordonatele centrelor de masă ale celor două bile sunt:

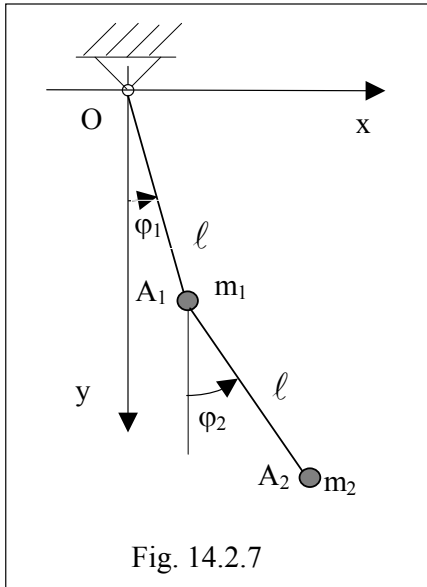


Fig. 14.2.7

$$A_1 \begin{cases} x_1 = \ell \sin \varphi_1 \\ y_1 = \ell \cos \varphi_1 \end{cases} \tag{a}$$

$$A_2 \begin{cases} x_2 = \ell(\sin \varphi_1 + \sin \varphi_2) \\ y_2 = \ell(\cos \varphi_1 + \cos \varphi_2) \end{cases}$$

Deci vitezele celor două bile sunt:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \ell \dot{\varphi}_1 \cos \varphi_1 \\ \dot{y}_1 = -\ell \dot{\varphi}_1 \sin \varphi_1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow v_1^2 = \dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 = \ell^2 \dot{\varphi}_1^2$$

$$\begin{cases} \dot{x}_2 = \ell(\dot{\varphi}_1 \cos \varphi_1 + \dot{\varphi}_2 \cos \varphi_2) \\ \dot{y}_2 = -\ell(\dot{\varphi}_1 \sin \varphi_1 + \dot{\varphi}_2 \sin \varphi_2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow v_2^2 = \dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 = \ell^2(\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_2^2 + 2\dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1))$$

Dacă se consideră  $\cos(\varphi_2 - \varphi_1) \cong 1$  se obține expresia energiei cinetice:

$$E = E_1 + E_2 = \frac{m\ell^2}{2}(2\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_2^2 + 2\dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2) \tag{b}$$

Funcția de forță se scrie:

$$U = -2mg\ell \left( 2 \sin^2 \frac{\varphi_1}{2} + \sin^2 \frac{\varphi_2}{2} \right) \cong \frac{1}{2} mg\ell (2\varphi_1^2 + \varphi_2^2) \tag{c}$$

Funcția lui Lagrange are deci expresia:

$$L = E + U = \frac{m\ell^2}{2}(2\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_2^2 + 2\dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2) + \frac{mg\ell}{2}(2\varphi_1^2 + \varphi_2^2) \tag{d}$$

Se aplică ecuațiile lui Lagrange sub forma:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_1} = 0; \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_2} = 0, \text{ cu } q_1 = \varphi_1 \text{ și } q_2 = \varphi_2$$

Se obține sistemul de ecuații diferențiale:

$$\begin{cases} 2\ell \ddot{\varphi}_1 + \ell \ddot{\varphi}_2 + 2g\varphi_1 = 0 \\ \ell \ddot{\varphi}_1 + \ell \ddot{\varphi}_2 + g\varphi_2 = 0 \end{cases} \tag{e}$$

Sistemul de ecuații diferențiale (e) admite soluții de forma:

$$\varphi_1 = C_1 \cos pt; \quad \varphi_2 = C_2 \cos pt$$

Ecuția caracteristică (ecuația pulsațiilor proprii) se scrie:

$$\begin{vmatrix} 2g - 2\ell p^2 & -\ell p^2 \\ -\ell p^2 & g - \ell p^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (f)$$

Dcei cele două pulsații proprii sunt soluțiile determinantului caracteristic (se exclud soluțiile negative):

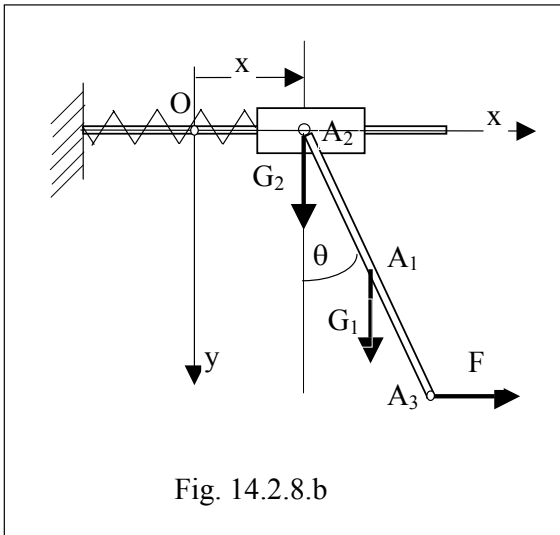
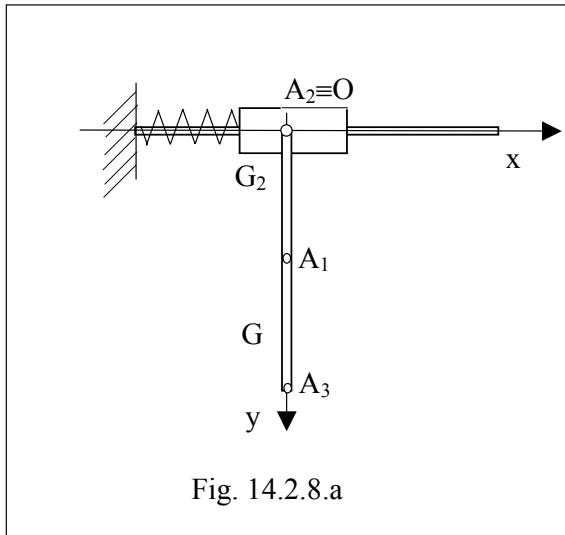
$$p_1 = \sqrt{\frac{\sqrt{2g}}{(\sqrt{2} + 1)\ell}}; \quad p_2 = \sqrt{\frac{\sqrt{2g}}{(\sqrt{2} - 1)\ell}} \quad (g)$$

**14.2.8. Se consideră** sistemul din figura 14.2.8.a format din culisa de greutate  $G_2$  și bara  $A_1A_2 = \ell$  de greutate  $G_1$ . Culisa se poate deplasa orizontal (se neglijează frecarea) fiind legată cu un resort de constantă elastică  $k$  de mediul fix. Asupra capătului  $A_3$  al barei se aplică o forță orizontală  $F$ . **Se cere:**

1. să se determine poziția de echilibru a sistemului
2. să se determine legea de mișcare a sistemului pornind din poziția de echilibru studiată la punctul (1), folosind ecuațiile lui Lagrange.

**Rezolvare**

1. Sistemul având două grade de libertate, se pot alege drept coordonate generalizate parametrii liniari  $x$  (Față de poziția inițială) și  $\theta$  (fig. 14.2.8.b).



Condiția de echilibru a sistemului se poate obține folosind două metode:

- a. din condiția de anulare a forțelor generalizate:

$$Q_k = \frac{(\delta L)_{q_k \text{ var}}}{\delta q_k} = 0, \quad k = 1, 2 \quad (a)$$

unde:  $Q_k$  poate reprezenta din punct de vedere dimensional o forță sau un cuplu, după cum coordonata generalizată corespunzătoare reprezintă o lungime sau un unghi.

$(\delta L)_{q_k, var}$  reprezintă lucrul mecanic virtual produs de sarcini numai pe deplasările date de variația parametrului  $q_k$ , adică  $(\delta q_k)$ .

Pentru cei doi parametri avem :

$$Q_x = \frac{(\delta L)_{x, var}}{\delta x} = \frac{-kx \cdot \delta x + F \cdot \delta x}{\delta x} = 0$$

$$Q_\theta = \frac{(\delta L)_{\theta, var}}{\delta \theta} = \frac{-G_1 \sin \theta \cdot \frac{\ell}{2} \cdot \delta \theta + F \cos \theta \cdot \ell \cdot \delta \theta}{\delta \theta} = 0 \quad (b)$$

Rezultă așadar valorile parametrilor pentru poziția de echilibru:

$$x = \frac{F}{k}; \quad \text{tg} \theta = \frac{2F}{G_1} \quad (c)$$

b. din anularea derivatelor parțiale ale funcției de forță a sistemului, întrucât forțele care acționează asupra sistemului sunt forțe conservative , adică:

$$\vec{F}_i = \frac{\partial U_i}{\partial x_i} \vec{i} + \frac{\partial U_i}{\partial y_i} \vec{j} + \frac{\partial U_i}{\partial z_i} \vec{k} \quad \text{atunci:} \quad Q_k = \frac{\partial U}{\partial q_k} = 0$$

În cazul problemei de față funcția de forță a sistemului se scrie:

$$U = \sum U_i = -\frac{1}{2} kx^2 + G_1 \ell \cos \theta - F(x + \ell \sin \theta) \quad (d)$$

$$\text{adică:} \quad \begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x} = -kx + F = 0 \\ \frac{\partial U}{\partial \theta} = -G_1 \frac{\ell}{2} \sin \theta + F \ell \cos \theta = 0 \end{cases} \quad (e)$$

Rezultă aceleași valori ale parametrilor pentru poziția de echilibru date de relația (c)

2. Coordonatele centrelor de masă ale celor două corpuri sunt:

$$A_1 \begin{cases} x_1 = x + \frac{\ell}{2} \sin \theta \\ y_1 = \frac{\ell}{2} \cos \theta \end{cases} \quad A_2 \begin{cases} x_2 = x \\ y_2 = 0 \end{cases} \quad (f)$$

Deci vitezele după cele două direcții sunt:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \dot{x} + \frac{\ell}{2} \dot{\theta} \cos \theta \\ \dot{y}_1 = -\frac{\ell}{2} \dot{\theta} \sin \theta \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{x}_2 = \dot{x} \\ \dot{y}_2 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow v_2^2 = \dot{x}^2 \quad (g)$$



$$v_1^2 = \left( \dot{x} + \frac{\ell}{2} \dot{\theta} \cos \theta \right)^2 + \left( -\frac{\ell}{2} \dot{\theta} \sin \theta \right)^2 = \dot{x}^2 + \frac{\ell^2}{4} \dot{\theta}^2 + \ell \dot{x} \dot{\theta} \cos \theta$$

Energia cinetică a sistemului se scrie:

$$E = E_1 + E_2 = \frac{G_1}{2g} v_1^2 + \frac{J_1}{2} \omega_2^2 + \frac{G_2}{2g} v_2^2 \quad (\text{h})$$

$$E = \frac{G_1}{2g} \left( \dot{x}^2 + \frac{\ell^2}{4} \dot{\theta}^2 + \ell \dot{x} \dot{\theta} \cos \theta + \frac{\ell^2}{12} \dot{\theta}^2 \right) + \frac{G_2}{2g} \dot{x}^2$$

Funcția de forță în acest caz are forma:  $U = -\frac{1}{2} kx^2 + G_1 \frac{\ell}{2} \cos \theta$  (i)

Funcția lui Lagrange are deci expresia:

$$L = E + U = \frac{G_1}{2g} \left( \dot{x}^2 + \frac{\ell^2}{3} \dot{\theta}^2 + \ell \dot{x} \dot{\theta} \cos \theta \right) + \frac{G_2}{2g} \dot{x}^2 - \frac{1}{2} kx^2 + G_1 \frac{\ell}{2} \cos \theta \quad (\text{j})$$

Se aplică ecuațiile lui Lagrange sub forma:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_1} = 0; \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_2} = 0, \text{ cu } q_1 = x \text{ și } q_2 = \theta$$

Se obține sistemul de ecuații diferențiale:

$$\begin{cases} \frac{G_1 + G_2}{g} \ddot{x} + \frac{G_1 \ell}{2g} \ddot{\theta} \cos \theta - \frac{G_1 \ell}{2g} \dot{\theta}^2 \sin \theta + kx = 0 \\ \frac{G_1 \ell}{2g} \ddot{x} \cos \theta + \frac{G_1 \ell^2}{3g} \ddot{\theta} + \frac{G_1 \ell}{2} \sin \theta = 0 \end{cases} \quad (\text{k})$$

În cazul micilor oscilații ale sistemului se poate considera  $\sin \theta \cong \theta$ ,  $\cos \theta = 1$  și se obține sistemul:

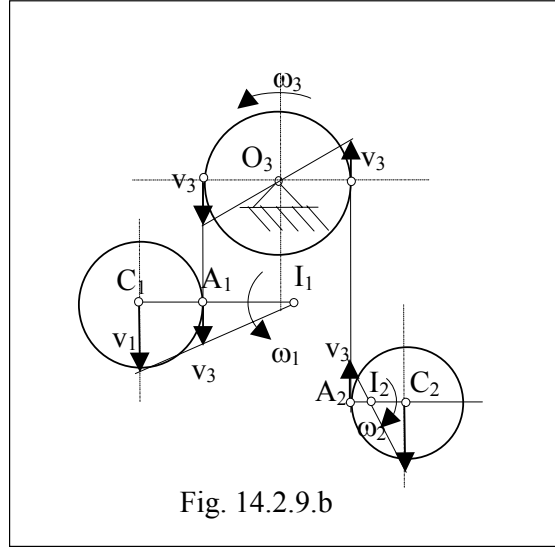
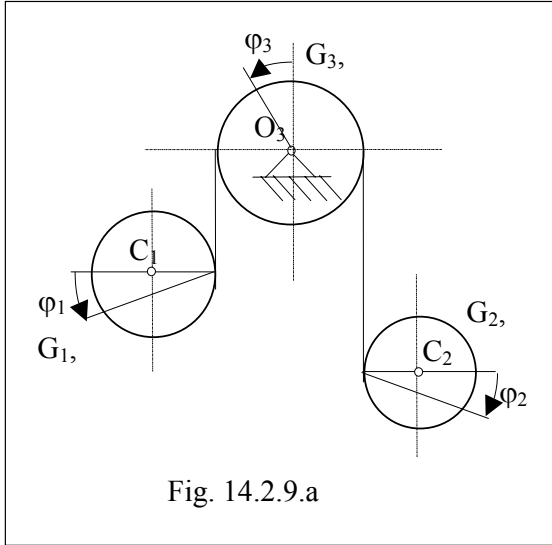
$$\begin{cases} \frac{G_1 + G_2}{g} \ddot{x} + \frac{G_1 \ell}{2g} \ddot{\theta} - \frac{G_1 \ell}{2g} \dot{\theta}^2 \cdot \theta + kx = 0 \\ \frac{G_1 \ell}{2g} \ddot{x} + \frac{G_1 \ell^2}{3g} \ddot{\theta} + \frac{G_1 \ell}{2} \cdot \theta = 0 \end{cases} \quad (\text{l})$$

Acest sistem se poate rezolva prin metode numerice obținându-se soluții aproximative care descriu mișcarea sistemului, soluții care țin seama și de condițiile inițiale ale problemei.

**14.2.9. Se consideră** sistemul format din trei discuri omogene de greutateți  $G_1$ ,  $G_2$ ,  $G_3$ , unul fix de rază  $R_3$  și celelalte mobile de rază  $R_1$  și  $R_2$  legate între ele cu ajutorul unor fire flexibile și inextensibile, care se îmbrășoară la periferia lor ca în figura 14.2.9.a. **Se cere:** Să se determine legea de mișcare a sistemului cu ajutorul ecuațiilor lui Lagrange

**Rezolvare**

Sistdemul are trei grade de libertate deoarece pentru stabilirea configurației lui sunt necesari trei parametri independenți: se consideră drept coordonate generalizate unghiurile de rotație ale celor trei discuri  $\varphi_1$   $\varphi_2$  și  $\varphi_3$ , conform fig. 14.2.9.a.



Din analiza cinematică a mișcării (conform fig 14.2.9.b) se obține:

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}_1 = \omega_1 = \frac{v_1}{R_1 + x} = \frac{v_3}{x} \quad (\text{unde } x = I_1 A_1) \\ \dot{\varphi}_2 = \omega_2 = \frac{v_3}{y} = \frac{v_1}{R_2 - y} \quad (\text{unde } y = I_1 A_1); \quad \dot{\varphi}_3 = \omega_3 = \frac{v_3}{R_3} \end{aligned} \tag{a}$$

Rezultă că vitezele centrelor de masă ale celor două discuri 1 și 2 sunt:

$$v_1 = R_1 \dot{\varphi}_1 + R_3 \dot{\varphi}_3; \quad v_2 = R_3 \dot{\varphi}_3 - R_2 \dot{\varphi}_2$$

Deci energia cinetică totală a sistemului se scrie:

$$\begin{aligned} E = E_1 + E_2 + E_3 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} J_1 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 + \frac{1}{2} J_2 \dot{\varphi}_2^2 + \frac{1}{2} J_3 \dot{\varphi}_3^2; \\ E = \frac{G_1}{2g} (R_1 \dot{\varphi}_1 + R_3 \dot{\varphi}_3)^2 + \frac{G_1}{4g} R_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{G_2}{2g} (R_3 \dot{\varphi}_3 - R_2 \dot{\varphi}_2)^2 + \frac{G_2}{4g} R_2^2 \dot{\varphi}_2^2 + \frac{G_3}{4g} R_3^2 \dot{\varphi}_3^2 \end{aligned} \tag{b}$$

Derivatele parțiale ale energiei cinetice totale se scriu astfel:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial \varphi_1} = 0; \quad \frac{\partial E}{\partial \varphi_2} = 0; \quad \frac{\partial E}{\partial \dot{\varphi}_1} = \frac{R_1 G_1}{g} (R_1 \dot{\varphi}_1 + R_3 \dot{\varphi}_3) + \frac{G_1}{2g} R_1^2 \dot{\varphi}_1 \\ \frac{\partial E}{\partial \dot{\varphi}_2} = -\frac{R_2 G_2}{g} (R_3 \dot{\varphi}_3 - R_2 \dot{\varphi}_2) + \frac{G_2}{2g} R_2^2 \dot{\varphi}_2 \\ \frac{\partial E}{\partial \dot{\varphi}_3} = \frac{R_3 G_1}{g} (R_1 \dot{\varphi}_1 + R_3 \dot{\varphi}_3) + \frac{R_3 G_2}{g} (R_3 \dot{\varphi}_3 - R_2 \dot{\varphi}_2) + \frac{G_3}{2g} R_3^2 \dot{\varphi}_3 \end{aligned} \tag{c}$$

Forțele generalizate  $Q_1$  și  $Q_2$  se calculează variind succesiv parametrul corespunzător ( $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  respectiv  $\varphi_3$ ) și fixându-l pe celălalt, (vezi fig. 14.2.9.b) adică:

$$Q_1 = \frac{(\delta L)_{\varphi_1 var}}{\delta \varphi_1} = R_1 G_1; \quad Q_2 = \frac{(\delta L)_{\varphi_2 var}}{\delta \varphi_2} = R_2 G_2; \quad Q_3 = \frac{(\delta L)_{\varphi_3 var}}{\delta \varphi_3} = R_3(G_1 - G_2) \quad (d)$$

Înlocuind în ecuațiile lui Lagrange :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E}{\partial \dot{\varphi}_k} \right) - \frac{\partial E}{\partial \varphi_k} = Q_k; \quad k = 1, 2, 3$$

se obține sistemul de ecuații algebrice:

$$\begin{cases} 3R_1\ddot{\varphi}_1 + 2R_3\ddot{\varphi}_3 = 2g \\ 3R_2\ddot{\varphi}_2 - 2R_3\ddot{\varphi}_3 = 2g \\ 2R_1G_1\ddot{\varphi}_1 - 2R_2G_2\ddot{\varphi}_2 + R_3(2G_1 + 2G_2 + G_3)\ddot{\varphi}_3 = 2g(G_1 - G_2) \end{cases} \quad (e)$$

Rezolvând acest sistem rezultă accelerațiile unghiulare :

$$\begin{cases} \ddot{\varphi}_1 = \frac{2g}{3R_1} \frac{4G_2 + 3G_3}{2G_1 + 2G_2 + 3G_3}; \\ \ddot{\varphi}_2 = \frac{2g}{3R_2} \frac{4G_1 + 3G_3}{2G_1 + 2G_2 + 3G_3}; \\ \ddot{\varphi}_3 = \frac{2g}{R_3} \frac{G_1 - G_2}{2G_1 + 2G_2 + 3G_3} \end{cases} \quad (f)$$

și accelerațiile centrelor de masă ale discurilor 1 și 2:

$$\begin{cases} a_1 = R_1\ddot{\varphi}_1 + R_3\ddot{\varphi}_3 = \frac{2g}{3} \frac{G_2 + 3(G_1 + G_3)}{2G_1 + 2G_2 + 3G_3}; \\ a_2 = R_3\ddot{\varphi}_3 - R_2\ddot{\varphi}_2 = -\frac{2g}{3} \frac{G_1 + 3(G_2 + G_3)}{2G_1 + 2G_2 + 3G_3} \end{cases} \quad (g)$$

### Observații

- Semnul minus de la accelerația  $a_2$  arată că sensul acestei accelerații este opus celui considerat în fig 14.2.9.b., adică:  $R_3\ddot{\varphi}_3 - R_2\ddot{\varphi}_2 < 0$ ;
- Sistemul fiind acționat numai de greutatea proprii este conservativ, deci există o funcție de forță  $U$  a sistemului care are expresia:

$U = G_1(R_1\varphi_1 + R_3\varphi_3) - G_2(R_3\varphi_3 - R_2\varphi_2)$ . Deci se pot considera ecuațiile lui

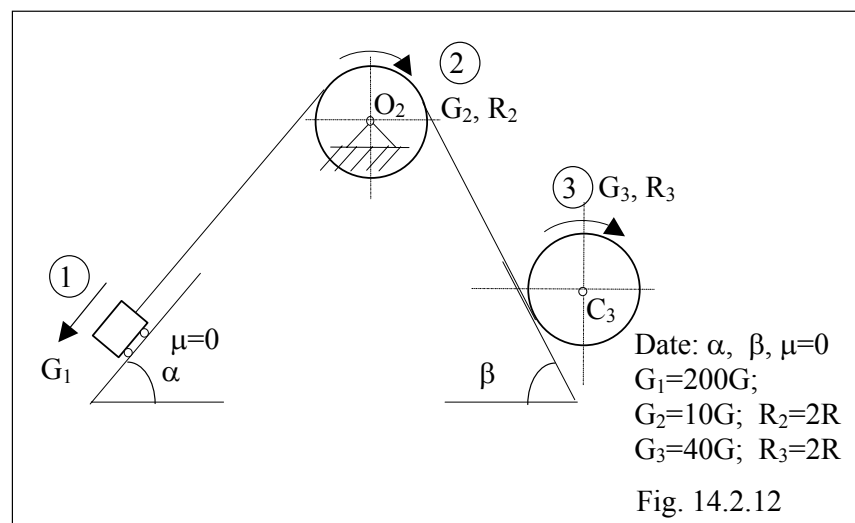
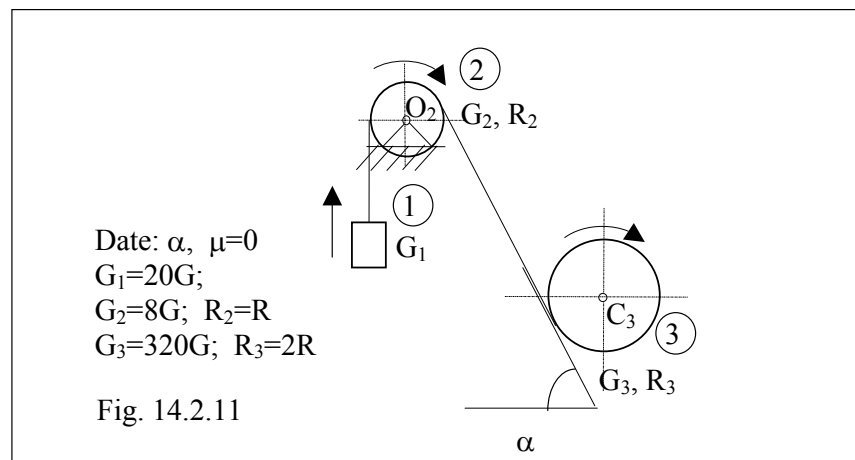
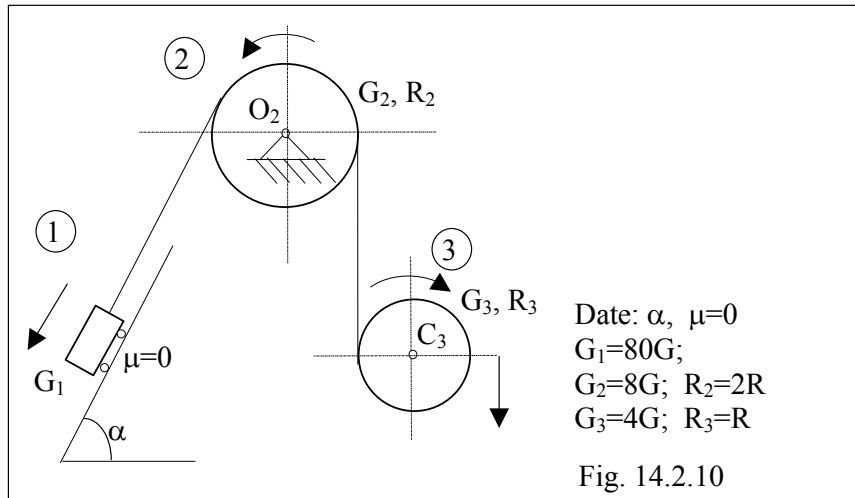
Lagrange sub forma: 
$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E}{\partial \dot{\varphi}_k} \right) - \frac{\partial E}{\partial \varphi_k} = \frac{\partial U}{\partial \varphi_k}; \quad k = 1, 2, 3$$

care conduc la aceleași ecuații algebrice (e).

**PROBLEME PROPUSE**

*Se consideră sistemele formate din trei corpuri: un corp de greutate  $G_1$  și două discuri omogene de greutate  $G_2, G_3$ , unul fix de rază  $R_2$  și celălalt mobil de rază  $R_3$  legate între ele cu ajutorul unor fire flexibile și inextensibile, care se înfășoară la periferia lor ca în figurile 14.2.10...4.2.12. (pentru problemele 4.2.11 și 4.2.12 corpul 3 se rostogolește și alunecă simultan, cu  $s=0, \mu=0$ )*

*Se cere: Să se determine legea de mișcare a sistemelor cu ajutorul ecuațiilor lui Lagrange.*



**BIBLIOGRAFIE**

1. Atanasiu, M. - *Mecanica* . Editura Didactică și Pedagogică, București, 1973.
2. Buchholtz, N.N., Voronkov, I.M., Minokov, I.A.- *Culegere de probleme de mecanică rațională* (traducere din limba rusă). Editura Tehnică, București, 1952.
3. Ceașu, V., Enescu, N., Ceașu, F. - *Culegere de probleme de mecanică*, I.P.București, vol.I, II, III, 1983.
4. Darabont, Al., Munteanu , M., Văiteanu, D.- *Mecanică tehnică. Culegere de probleme. Statica și Cinematica*. Editura Scrisul Românesc, Craiova, 1983
5. Enescu, N., Stroe, S., Ion, C., Ivan, M., Magheți, I., Ion, E., Savu, M., Cazacu, G. *Seminar de Mecanică. Probleme*. IPBucurești, 1990
6. Huidu, T. - *Mecanica teoretică și elemente de mecanica solidului deformabil*, vol. I, II, Institutul de Petrol și Gaze, Ploiești, 1983
7. Iacob, C. - *Mecanica Teoretică*. Ed. Didactică și Pedagogică, București, 1971
8. Marin , C., Huidu, T. - *Mecanica*. Editura Printech, Bucuresti 1999.
9. Posea, N., Florian,V., Talle,V., Tocaci, E.- *Mecanica aplicată pentru ingineri*. Editura tehnică, București, 1984.
- 10.Rădoi, M., Deciu, E. - *Mecanica* . Editura Didactică și Pedagogică, București, 1977
11. Roșca, I. – *Mecanica pentru ingineri*. Editura MatrixRom, București, 1998.
12. Roșca, I. – Sumar de *Mecanica*. Editura MatrixRom, București, 1999
13. Staicu, Șt.- *Mecanica*. Editura Didactică și Pedagogică R.A, București, 1998.
- 14.Vâlcovici, V., Bălan, Șt., Voinea, R. - *Mecanica Teoretică*. Editura Didactică și Pedagogică, București, 1968
- 15.Voinaroski, R. - *Mecanica Teoretică*. Editura Didactică și Pedagogică, București, 1968
- 16.Voinea, R., Voiculescu, D., Ceașu, V. - *Mecanica* . Editura Didactică și Pedagogică, București, 1975